Title: Istnienie gęstości niezmienniczych dla semiukładów dynamicznych ze skokami

Author: Weronika Biedrzycka

Citation style: Biedrzycka, Weronika. (2018). Istnienie gęstości niezmienniczych dla semiukładów dynamicznych ze skokami. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII
INSTYTUT MATEMATYKI

WERONIKA BIEDRZYCKA

ISTNIENIE GĘSTOŚCI NIEZMIENNICZYCH DLA SEMIUKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZE SKOKAMI

ROZPRAWA DOKTORSKA

PROMOTOR:
DR HAB. MARTA TYRAN-KAMIŃSKA

KATOWICE 2018

Podziękowania dla

Dr hab. Marty Tyran-Kamińskiej za wszelką pomoc w przygotowaniu tej rozprawy i opiekę naukową podczas studiów doktoranckich. Dziękuję za długie godziny spędzone na dyskusjach, motywowanie do pracy nad rozprawą, a przede wszystkim za zainteresowanie biomatematyką i pokrewnymi dziedzinami matematyki.

Kochanego Męża Marka, bez którego ta rozprawa by nie powstała. Dziękuję za wyrozumiałość i wsparcie oraz wiele długich matematycznych dyskusji.

Rodziców oraz Dziadka za każde dobre słowo i zainteresowanie postępami w przygotowaniu tej rozprawy.

Spis treści

Wstęp

Teoria procesów stochastycznych to jeden z najistotniejszych działów teorii prawdopodobieństwa. Rozwój obu tych teorii przyczynił się do sformalizowania wielu abstrakcyjnych pojęć matematyki teoretycznej, np. z zakresu teorii miary i całki. Jednak nie mniejszą rolę procesy stochastyczne odgrywają przy budowaniu modeli probabilistycznych różnorakich zjawisk przyrodniczych czy ekonomicznych.

W tej rozprawie będziemy zajmować się jedynie niewielkim fragmentem tej teorii, jakim są kawałkami deterministyczne procesy Markowa (KDPM), a dokładniej semiukładami dynamicznymi ze skokami. Jest to niezwykle ważna klasa procesów mająca liczne zastosowania, m. in. w modelowaniu procesów urodzin i śmierci, ekspresji genu czy fragmentacji. KDPM to proces z czasem ciągłym $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$, dla którego istnieje rosnący ciąg tzw. momentów skoków (t_n). Pomiędzy dwoma kolejnymi skokami proces jest deterministyczny. Dokładną definicję podamy w rozdziale 1.

Omawiane procesy Markowa badamy z wykorzystaniem teorii silnie ciągłych półgrup nieujemnych operatorów zwężających $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ (*półgrupy podstochastyczne*) na przestrzeni L^1 funkcji całkowalnych względem ustalonej miary m. Rozdział 2 poświęcimy na zdefiniowanie wielu niezbędnych nam pojęć, jak operatory stochastyczne i gęstości niezmiennicze. Przywołamy także wyniki pozwalające podać warunki dostateczne (oparte na [56, 57]) na istnienie i jednoznaczność gęstości niezmienniczej dla operatorów przejścia. Przytoczymy również pojęcie półgrupy podstochastycznej i zacytujemy twierdzenia o asymptotyce takich półgrup.

Problem istnienia gęstości niezmienniczych dla półgrup podstochastycznych omówimy obszernie w rozdziale 3. Rozpoczniemy od twierdzenia perturbacyjnego Kato-Voigta pozwalającego uzyskać tzw. półgrupę minimalną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Korzystając z wyników uzyskanych w [62] otrzymujemy, że dla łańcucha $(X(t_n))_{n\geqslant 0}$ istnieje jedyny operator liniowy K (operator stochastyczny) na L^1, który spełnia warunek: jeżeli rozkład zmiennej losowej $X(0)$ ma gęstość f, tzn.

$$\Pr(X(0) \in B) = \int_B f(x)m(dx), \quad B \in \mathcal{B}(E),$$

to $X(t_1)$ ma gęstość Kf. Związki pomiędzy gęstościami niezmienniczymi operatora K oraz gęstościami niezmienniczymi półgrupy minimalnej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ są głównym tematem tego rozdziału. Kluczowe są tu twierdzenia 3.5 i 3.12, a wynikający z nich wniosek 3.14, jest naszym głównym narzędziem używanym w dowodzie twierdzenia 4.2. Podaje ono warunki wystarczające na istnienie jedynej gęstości niezmienniczej dla kawałkami deterministycznego procesu Markowa. Czytelnika zachęcamy do porównania twierdzeń 3.5 i 3.12 (wraz z wnioskami 3.11 i 3.13) z [20, twierdzeniami 1 i 2] oraz [51, twierdzeniem 5]. W naszych wynikach nie musimy zakładać, że proces jest niewybuchający, a miary niezmiennicze, których poszukujemy są absolutnie ciągłe. Ponadto, w [51] półgrupa podstochastyczna jest uzyskiwana za pomocą twierdzenia Descha [24], które z naszego punktu widzenia jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.1. Ta część rozprawy oparta jest przede wszystkim na artykule [14].

Rozdział 4 poświęcimy zagadnieniu istnienia gęstości niezmienniczych dla semiukładów ze skokami. Jest to kluczowy problem dla wielu zastosowań procesów stochastycznych [23, 48, 39]. Jednym z głównych wyników jest, wspomniane już, twierdzenie 4.2. Oznaczmy symbolem $\mathbb{P}_x$ rozkład procesu startującego w punkcie $X(0) = x$. Jeżeli dla pewnego $t > 0$ i dla pewnego x ze zbioru o dodatniej mierze m absolutnie ciągła składowa rozkładu Lebesgue'a miary $\mathbb{P}_x(X(t) \in \cdot)$ jest nietrywialna, to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa jak w [54]. Dzięki temu możemy połączyć twierdzenie 4.2 z [54, twierdzeniem 2] (zacytowanym tu jako twierdzenie 2.9) i uzyskać asymptotyczną stabilność półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ (twierdzenie 4.6), tzn. fakt, że gęstość $X(t)$ zbiega do gęstości niezmienniczej w L^1 niezależnie od gęstości $X(0)$. Warto podkreślić, że dla tego wyniku warunek (4.3) jest nie tylko wystarczający, ale i konieczny. W sekcji 4.2 podamy warunki dostateczne na istnienie gęstości niezmienniczych i częściową całkowość półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ w formie ułatwiającej praktyczne zastosowanie, czyli zapisane za pomocą lokalnych charakterystyk semiukładów ze skokami. W końcowej sekcji rozdziału 4 pokażemy jak w naszym języku zapisywać układy dynamiczne z losowym przełączaniem (opisane w [54, 4, 10]). Uzyskamy jeden semiukład określony na produkcie $M \times I$, gdzie M jest pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^d$, a I jest skończonym lub przeliczalnym zbiorem wskaźników. Również ten rozdział powstał na podstawie publikacji [14].

W ostatnich dwóch rozdziałach zaprezentujemy sposób zastosowania naszych wyników do analizy modeli biologicznych. Będzie to dwuwymiarowy model ekspresji genu z tzw. burstingiem (rozdział 5) oraz proces fragmentacji (rozdział 6). Rozdział 5 prezentuje wyniki pochodzące z [14], natomiast rozdział 6 oparty jest na publikacji [15]. Nasz warsztat może być więc stosowany przy analizie procesów biologicznych opisanych za pomocą KDPM, jak np. w [31, 41, 42, 43] dla ekspresji genu z tzw. burstingiem, w [40, 16, 69, 59] do dynamiki z przełączeniami czy w innych przypadkach [58].

Rozdział 1

Wprowadzenie

Badamy klasę kawałkami deterministycznych procesów Markowa KDPM, które nazywamy semiukładami dynamicznymi ze skokami. Zgodnie z definicją w [22, 23] KDPM bez aktywnych barier jest określony przez trzy lokalne charakterystyki $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$, gdzie π jest semiukładem opisującym deterministyczne części procesu, $\varphi(x)$ jest intensywnością skoku z x, a $\mathcal{P}(x, \cdot)$ jest rozkładem stanu osiągniętego przez ten skok. Rozpatrujemy semiukłady dynamiczne czy po prostu semiukłady, które uzyskujemy jako rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych

$$x'(t) = g(x(t)), \tag{1.1}$$

gdzie $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest odwzorowaniem ciągłym i (lokalnie) lipschitzowskim.

Załóżmy, że E jest takim borelowskim podzbiorem $\mathbb{R}^d$, że dla każdego $x_0 \in E$ rozwiązanie $x(t)$ równania (1.1) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ istnieje, a ponadto $x(t) \in E$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Oznaczmy to rozwiązanie jako $\pi_t x_0$. Wówczas odwzorowanie $(t, x_0) \mapsto \pi_t x_0$ jest borelowskie i spełnia zależność $\pi_0 x = x$, $\pi_{t+s} x = \pi_t(\pi_s x)$ dla $x \in E$, $s, t \in \mathbb{R}_+$. Natomiast mówiąc o skokach rozpatrujemy rodzinę odwzorowań mierzalnych $T_\theta\colon E \to E$, $\theta \in \Theta$, gdzie Θ jest przestrzenią metryczną z miarą borelowską ν oraz rodzinę funkcji mierzalnych $p_\theta\colon E \to [0, \infty)$, $\theta \in \Theta$, spełniających

$$\int_\Theta p_\theta(x)\nu(d\theta) = 1, \quad x \in E,$$

tak, że jądro stochastyczne $\mathcal{P}$ jest postaci

$$\mathcal{P}(x, B) = \int_\Theta 1_B(T_\theta(x)) p_\theta(x)\nu(d\theta), \quad x \in E, \tag{1.2}$$

dla $B \in \mathcal{B}(E)$, gdzie $\mathcal{B}(E)$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na E. W uproszczeniu oznacza to, że jeśli wartość procesu wynosi x, to z prawdopodobieństwem $p_\theta(x)$ wykonamy skok do punktu $T_\theta(x)$. Zakładamy, że odwzorowania $(\theta, x) \mapsto T_\theta(x)$ i $(\theta, x) \mapsto p_\theta(x)$ są mierzalne, a zatem jądro stochastyczne określone w (1.2) jest dobrze zdefiniowane, a funkcja intensywności $\varphi\colon E \to [0, \infty)$

jest mierzalna oraz

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \varphi(\pi_s x)ds = +\infty \quad \text{dla wszystkich } x \in E. \tag{1.3}$$

Opiszemy teraz krótko konstrukcję KDPM $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ o charakterystykach $(\pi,\varphi,\mathcal{P})$ (szczegóły np. w [22, 23]). Zdefiniujmy funkcję

$$F_x(t) = 1 - \exp\{-\int_0^t \varphi(\pi_s x)ds\}, \quad t \geqslant 0, x \in E, \tag{1.4}$$

i zauważmy, że założenia nałożone na φ implikują, że F_x jest dystrybuantą nieujemnej i skończonej zmiennej losowej dla każdego $x \in E$. Niech $t_0 = 0$ oraz niech $X(0) = X_0$ będzie zmienną losową o wartościach w E. Dla każdego $n \geqslant 1$ możemy wybrać $n$ty *moment skoku* t_n jako nieujemną zmienną losową spełniającą

$$\Pr(t_n - t_{n-1} \leqslant t | X_{n-1} = x) = F_x(t), \quad t \geqslant 0.$$

Zdefiniujmy

$$X(t) = \begin{cases} \pi_{t-t_{n-1}}(X_{n-1}) & \text{dla } t_{n-1} \leqslant t < t_n, \\ X_n & \text{dla } t = t_n, \end{cases}$$

gdzie $n$te *położenie* X_n *po skoku* jest taką zmienną losową o wartościach w zbiorze E, że

$$\Pr(X_n \in B | X(t_n-) = x) = \mathcal{P}(x, B),$$

oraz $X(t_n-) = \lim_{t\uparrow t_n} X(t) = \pi_{t_n - t_{n-1}}(X_{n-1})$. W ten sposób trajektoria procesu jest zdefiniowana dla wszystkich $t < t_\infty := \lim_{n\to\infty} t_n$, a t_∞ nazywamy czasem wybuchu. Aby rozszerzyć definicję dla dowolnego czasu t przyjmijmy $X(t) = \Delta$ dla $t \geqslant t_\infty$, gdzie $\Delta \notin E$ jest pewnym dodatkowym stanem reprezentującym tzw. punkt cmentarny (cemetery point) procesu. KDPM $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ nazywamy *minimalnym* KDPM odpowiadającym $(\pi,\varphi,\mathcal{P})$. Mówimy, że jest *niewybuchający* jeżeli $\mathbb{P}_x(t_\infty = \infty) = 1$ dla m-prawie wszystkich (m-p.w.) $x \in E$, gdzie $\mathbb{P}_x$ jest rozkładem procesu startującego w $X(0) = x$. Operator wartości oczekiwanej względem rozkładu $\mathbb{P}_x$ oznaczamy $\mathbb{E}_x$.

Zagadnienie istnienia i jednoznaczności niezmienniczej miary probabilistycznej dla procesu $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ w porównaniu do podobnego problemu dla łańcucha $(X(t_n))_{n\geqslant 0}$ był omawiany w [20] w kontekście ogólnych KDPM z barierami i pod pewnymi technicznymi założeniami. Czytelnika odsyłamy również do [26, 21], gdzie poruszany jest temat równoważności pomiędzy własnościami stabilnościowymi procesów ciągłych oraz związanych z nimi procesów dyskretnych. W niniejszej rozprawie skupiamy się na istnieniu absolutnie ciągłych miar niezmienniczych oraz używamy wyników uzyskanych w [62]. Z tego powodu musimy założyć, że semiukład $\{\pi_t\}_{t\geqslant 0}$ spełnia warunek $\pi_t(E) \subseteq E$ dla wszystkich $t \geqslant 0$ (co implikuje, że nie ma aktywnych barier) oraz że jądro stochastyczne $\mathcal{P}$ opisujące skoki wyznacza operator przejścia P na L^1 (patrz (2.1)) i w ten sposób możemy użyć [62, twierdzenia 5.2]. W szczególności jądro $\mathcal{P}$, określone jak w (1.2) pozwala skonstruować wiele interesujących przykładów.

Rozdział 2

Operatory i półgrupy podstochastyczne

2.1 Operatory podstochastyczne

Niech $(E, \mathcal{E}, m)$ będzie σ-skończoną przestrzenią mierzalną. Rozważać będziemy przestrzeń funkcji całkowalnych $L^1 = L^1(E, \mathcal{E}, m)$. Oznaczmy przez $D(m) \subset L^1$ zbiór wszystkich *gęstości* na E, tzn.

$$D(m) = \{f \in L^1_+ : \|f\| = 1\}, \quad \text{gdzie } L^1_+ = \{f \in L^1 : f \geqslant 0\},$$

a $\|\cdot\|$ oznacza normę w L^1:

$$\|f\| = \int_E |f(x)| m(dx), \quad f \in L^1.$$

Operator liniowy $P \colon L^1 \to L^1$ taki, że $P(D(m)) \subseteq D(m)$ nazywamy *stochastycznym* lub *Markowa* [39]. Nazywamy go *podstochastycznym*, jeżeli P jest nieujemną kontrakcją, tzn. $Pf \geqslant 0$ oraz $\|Pf\| \leqslant \|f\|$ dla wszystkich $f \in L^1_+$.

Niech $\mathcal{P} \colon E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ będzie *(stochastycznym) jądrem przejścia*, tzn. $\mathcal{P}(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną dla każdego $x \in E$, a funkcja $x \mapsto \mathcal{P}(x, B)$ jest mierzalna dla każdego $B \in \mathcal{E}$ oraz niech P będzie operatorem stochastycznym na L^1. Jeżeli

$$\int_E \mathcal{P}(x, B) f(x) m(dx) = \int_B Pf(x) m(dx) \tag{2.1}$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{E}$, $f \in D(m)$, to P nazywamy operatorem *przejścia* odpowiadającym $\mathcal{P}$.

Operator stochastyczny P na L^1 nazywamy *częściowo całkowym*, jeżeli istnieje taka funkcja mierzalna $p \colon E \times E \to [0, \infty)$, że

$$\int_E \int_E p(x, y)\, m(dx)\, m(dy) > 0 \quad \text{i} \quad Pf(x) \geqslant \int_E p(x, y) f(y)\, m(dy)$$

dla m-p.w. $x \in E$ i dla każdej gęstości f. Jeśli p dodatkowo spełnia

$$\int_E p(x,y)\, m(dy) > 0$$

dla m-p.w. $x \in E$, to P nazywamy *operatorem preharrisowskim.*

Przypomnijmy, że mierzalne odwzorowanie $T\colon E \to E$ nazywamy *niesingularnym* względem m, gdy miara $m \circ T^{-1}$ jest absolutnie ciągła względem miary m, tzn. $m(T^{-1}(B)) = 0$ dla $m(B) = 0$. Jeżeli $T\colon E \to E$ jest niesingularne, wówczas istnieje jedyny operator stochastyczny $\widehat{T}\colon L^1 \to L^1$ spełniający

$$\int_B \widehat{T} f(x) m(dx) = \int_{T^{-1}(B)} f(x) m(dx)$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{E}$ i $f \in D(m)$. Operator $\widehat{T}$ zwykle jest nazywany [39] operatorem *Frobeniusa-Perrona* związanym z T.

Przykład 2.1. Jeżeli $T\colon E \to E$ jest różnowartościowe i niesingularne względem miary m, to

$$\widehat{T} f(x) = 1_{T(E)}(x) f(T^{-1}(x)) \frac{d(m \circ T^{-1})}{dm}(x) \quad \text{dla } m\text{-p.w. } x \in E,$$

gdzie $d(m \circ T^{-1})/dm$ jest pochodną Radona-Nikodýma miary $m \circ T^{-1}$ względem miary m:

$$m(T^{-1}(B)) = \int_B \frac{d(m \circ T^{-1})}{dm}(x) m(dx), \quad B \in \mathcal{E}.$$

Przykład 2.2 (Iterowany układy funkcyjny). Niech $T_1, \ldots, T_n$ będą niesingularnymi przekształceniami przestrzeni E oraz niech $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ będą takimi nieujemnymi funkcjami mierzalnymi określonymi na E, że $p_1(x) + \cdots + p_n(x) = 1$ dla każdego $x \in E$. Weźmy punkt x. Wybierzmy przekształcenie T_i z prawdopodobieństwem $p_i(x)$. Położenie punktu x po zadziałaniu układu jest określone przez $T_i(x)$. Zatem rozpatrujemy następujące jądro przejścia

$$\mathcal{P}(x, B) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \delta_{T_i(x)}(B)$$

dla wszystkich $x \in E$ oraz zbiorów mierzalnych B. Jeżeli $f \in D(m)$ to

$$\int_E \mathcal{P}(x,B) f(x)\, m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i^{-1}(B)} p_i(x) f(x)\, m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \int_B \widehat{T}_i(p_i f)(x)\, m(dx),$$

gdzie $\widehat{T}_1, \ldots, \widehat{T}_n$ są operatorami Frobeniusa-Perrona związanymi odpowiednio z $T_1, \ldots, T_n$. Wówczas stochastyczny operator przejścia na L^1 odpowiadający $\mathcal{P}$ jest postaci

$$Pf = \sum_{i=1}^{n} \widehat{T}_i(p_i f).$$

Przykład 2.3. Rozważmy rodzinę mierzalnych przekształceń $T_\theta\colon E \to E$, $\theta \in \Theta$, gdzie Θ jest przestrzenią metryczną z miarą borelowską ν, oraz rodzinę funkcji mierzalnych $p_\theta\colon E \to [0,\infty)$, $\theta \in \Theta$ spełniającą

$$\int_\Theta p_\theta(x)\nu(d\theta) = 1, \quad x \in E,$$

tak, że jądro stochastyczne P jest postaci (1.2). Jeżeli $f \in D(m)$ to

$$\begin{aligned}\int_E \mathcal{P}(x,B)f(x)\,m(dx) &= \int_E \int_\Theta 1_B(T_\theta(x))p_\theta(x)\nu(d\theta)f(x)\,m(dx)\\ &= \int_\Theta \int_E 1_B(T_\theta(x))p_\theta(x)f(x)\,m(dx)\nu(d\theta)\\ &= \int_\Theta \int_E 1_B(x)\widehat{T}_\theta(p_\theta f)(x)\,m(dx)\nu(d\theta)\\ &= \int_E 1_B(x)\int_\Theta \widehat{T}_\theta(p_\theta f)(x)\nu(d\theta)\,m(dx),\end{aligned}$$

gdzie $\widehat{T}_\theta$ jest operatorem Frobeniusa-Perrona związanym z T_θ. Wówczas stochastyczny operator przejścia P odpowiadający $\mathcal{P}$, jak w (1.2), jest postaci

$$Pf = \int_\Theta \widehat{T}_\theta(p_\theta f)\nu(d\theta), \quad f \in L^1. \tag{2.2}$$

Możemy rozszerzyć operator podstochastyczny P poza przestrzeń L^1 w następujący sposób. Jeżeli $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$, wówczas f_n jest punktowo p.w.-zbieżny, a jego granicę oznaczamy $\sup_n f_n$. Dla $f \geqslant 0$ definiujemy

$$Pf = \sup_n Pf_n \quad \text{dla } f = \sup_n f_n, f_n \in L^1_+.$$

Zauważmy, że Pf jest niezależny od konkretnego ciągu przybliżeń f_n oraz, że Pf może być nieskończony (patrz np. [30, str. 6]). Ponadto, jeżeli P jest operatorem przejścia odpowiadającym $\mathcal{P}$, to własność (2.1) jest zachowana dla wszystkich nieujemnych i mierzalnych f.

2.2 Gęstości niezmiennicze

Nieujemną, mierzalną funkcję f_* nazywamy *podniezmienniczą (niezmienniczą)* dla operatora podstochastycznego P, gdy $Pf_* \leqslant f_*$ ($Pf_* = f_*$). Zauważmy, że jeżeli f_* jest podniezmienniczą gęstością dla operatora stochastycznego P, to f_* jest niezmiennicza dla P. Istotnie, jeżeli f_* jest podniezmiennicza dla operatora P, to $f_* - Pf_* \geqslant 0$. Funkcja f_* jest gęstością, a P jest stochastyczny, więc

$$\int_E (f_*(x) - Pf_*(x))\,m(dx) = \|f_*\| - \|Pf_*\| = 0.$$

Zatem $f_* = Pf_*$.

Operator podstochastyczny P nazywamy *średnio ergodycznym* gdy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n f \quad \text{istnieje dla wszystkich } f \in L^1$$

i *asymptotycznie stabilnym* gdy istnieje taka gęstość niezmiennicza f_*, że

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - f_*\| = 0 \quad \text{dla } f \in D(m).$$

Zauważmy, że operator asymptotycznie stabilny jest średnio ergodyczny. Jeżeli operator podstochastyczny ma gęstość podniezmienniczą f_* oraz $f_* > 0$ p.w., to operator ten jest średnio ergodyczny (patrz np. [36, lemat 1.1, twierdzenie 1.1]).

Mówimy, że operator stochastyczny jest *ściśle średnio ergodyczny*, jeżeli istnieje taka gęstość niezmiennicza f_*, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n f = f_* \|f\| \quad \text{dla wszystkich } f \in L^1_+. \tag{2.3}$$

W szczególności, gdy P ma jedyną gęstość niezmienniczą f_* oraz $f_* > 0$ p.w., to P jest ściśle średnio ergodyczny (patrz np. [39, twierdzenie 5.2.2]). Również operator asymptotycznie stabilny jest ściśle średnio ergodyczny. Ponadto, poniższy wynik pokazuje, że operator o tej własności nie może mieć niecałkowalnej funkcji podniezmienniczej. Dla dowolnej mierzalnej funkcji f *nośnik* f jest określony jako

$$\operatorname{supp} f = \{x \in E : f(x) \neq 0\},$$

z dokładnością do zbiorów miary m zero.

Lemat 2.1. *Załóżmy, że operator stochastyczny P jest ściśle średnio ergodyczny z gęstością niezmienniczą f_*. Jeżeli $\tilde{f}_*$ jest podniezmiennicza dla P i $m(\operatorname{supp} f_* \cap \{x : \tilde{f}_*(x) < \infty\}) > 0$, to $\tilde{f}_* \in L^1$.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $\tilde{f}_* \notin L^1$. Ponieważ $m(\operatorname{supp} \tilde{f}_*) > 0$, możemy zdefiniować domkniętą podprzestrzeń przestrzeni L^1 następująco

$$L^1_* = \{f \in L^1 : \operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \tilde{f}_*\}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$(f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}, \quad x \in L^1.$$

Dla dowolnej funkcji $f \in L^1_+$ spełniającej warunek $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \tilde{f}_*$ zdefiniujmy funkcję f_k jako

$$f_k = f \wedge k\tilde{f}_*, \quad k \in \mathbb{N}$$

i zauważmy, że $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ oraz

$$P(f \wedge k\tilde{f}_*) \leqslant k\tilde{f}_*, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oznaczając $Pf = \lim_{k\to\infty} P(f_k)$ otrzymujemy $Pf(x) = 0$, jeśli tylko $\tilde{f}_*(x) = 0$. A zatem $P(L^1_*) \subseteq L^1_*$. Operator P jest stochastyczny, więc $\operatorname{supp} f_* \subseteq \operatorname{supp} \tilde{f}_*$. Miara m jest σ-skończona, z czego wynika, że istnieje taki wstępujący ciąg zbiorów B_l, $l \geqslant 1$, że $B_l \subseteq \operatorname{supp} \tilde{f}_*$, $m(B_l) < \infty$ dla wszystkich $l \geqslant 1$ oraz

$$\operatorname{supp} \tilde{f}_* = \bigcup_{l \geqslant 1} B_l.$$

Zdefiniujmy teraz następująco rodzinę funkcji $f_{k,l}$

$$f_{k,l} = \tilde{f}_* \wedge k 1_{B_l}, \quad k, l \geqslant 1$$

i zauważmy, że $\lim_{k\to\infty} f_{k,l} = \tilde{f}_* 1_{B_l}$ dla $l \geqslant 1$. Z podniezmienniczości funkcji $\tilde{f}_*$ mamy

$$P^n f_{k,l} \leqslant P^n \tilde{f}_* \leqslant \tilde{f}_*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Łącząc powyższą zależność z faktem, że operator P jest ściśle średnio ergodyczny otrzymujemy

$$\tilde{f}_* \geqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n \tilde{f}_* \geqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n f_{k,l} = f_* \|f_{k,l}\|, \quad k, l \geqslant 1.$$

Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej uzyskujemy

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{k,l}\| = \int_E \lim_{k\to\infty} f_{k,l}(x) m(dx) = \int_{B_l} \tilde{f}_*(x) m(dx), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Wykorzystując fakt, że ciąg zbiorów B_l jest wstępujący i uwzględniając hipotezę nie wprost dostajemy

$$\lim_{l\to\infty} \int_{B_l} \tilde{f}_*(x) m(dx) = \int_{\operatorname{supp} \tilde{f}_*} \tilde{f}_*(x) m(dx) = +\infty,$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem $m(\operatorname{supp} f_* \cap \{x : \tilde{f}_*(x) < \infty\}) > 0$. $\square$

Aby dowieść, że operator ma jednoznacznie wyznaczoną, ściśle dodatnią gęstość niezmienniczą użyjemy podejścia zaprezentowanego w [56, 57]. Operator stochastyczny P nazywamy *wymiatającym* ze zbioru $B \in \mathcal{E}$ gdy

$$\lim_{n\to\infty} \int_B P^n f(x) m(dx) = 0 \quad \text{dla wszystkich } f \in D(m).$$

Niech $\mathcal{E}_* \subset \mathcal{E}$ będzie daną rodziną mierzalnych podzbiorów zbioru E. Operator stochastyczny P nazywamy *wymiatającym z rodziny zbiorów $\mathcal{E}_*$* gdy P jest wymiatający z każdego zbioru $B \in \mathcal{E}_*$.

Z lematu 2 oraz twierdzenia 2 z [56] otrzymujemy następujący wynik. Jego uogólnienia można znaleźć w [55].

Twierdzenie 2.2. *Niech E będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ będzie σ-ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni E. Załóżmy, że P jest operatorem przejścia odpowiadającym stochastycznemu jądru przejścia $\mathcal{P}$ spełniającym następujące warunki:*

(a) *nie ma zbiorów P-*pochłaniających*, tzn., nie istnieje taki zbiór $B \in \mathcal{E}$, że $m(B) > 0$, $m(E \setminus B) > 0$ oraz $\mathcal{P}(x, B) \geqslant 1_B(x)$ dla m-p.w. $x \in E$,*

(b) *dla każdego $x_0 \in E$ istnieją takie $\delta > 0$, nieujemna funkcja mierzalna η spełniająca $\int \eta(y)m(dy) > 0$ oraz dodatnia liczba całkowita n, że*

$$\mathcal{P}^n(x, B) \geqslant 1_{B(x_0,\delta)}(x) \int_B \eta(y)m(dy)$$

dla m-p.w. $x \in E$ i dla wszystkich $B \in \mathcal{B}(E)$, gdzie $B(x_0, \delta)$ jest kulą o środku w x_0 i promieniu δ.

Wówczas albo P jest wymiatający ze zbiorów zwartych w E albo P ma gęstość niezmienniczą f_*. W drugim przypadku f_* jest wyznaczona jednoznacznie i $f_* > 0$ p.w.

Aby wykluczyć wymiatanie możemy zastosować warunek typu Fostera-Lapunowa [48, 53].

Lemat 2.3. *Niech P będzie operatorem przejścia odpowiadającym stochastycznemu jądru przejścia $\mathcal{P}$. Załóżmy, że zachodzi następujący warunek:*

(c) *istnieją zbiór B_0, dwie dodatnie stałe c_1, c_2 i nieujemna funkcja mierzalna V taka, że $m(x : V(x) < \infty) > 0$ oraz*

$$\int_E V(y)\mathcal{P}(x, dy) \leqslant V(x) - c_1 + c_2 1_{B_0}(x), \quad x \in E. \tag{2.4}$$

Wówczas

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{B_0} P^n f(x)m(dx) \geqslant \frac{c_1}{c_2} > 0$$

dla wszystkich takich $f \in D(m)$, że $\int_E V(x)f(x)m(dx) < \infty$. W szczególności P nie jest wymiatający ze zbioru B_0.

Dowód. Przedstawimy dowód w oparciu o [60]. Operator P jest stochastyczny, więc dla dowolnej gęstości f mamy $P^n f \in D(m)$, $n \geqslant 0$. Pokażemy najpierw, że $\int_E V(x)P^n f(x)m(dx) < \infty$, $n \geqslant 0$ oraz

$$c_2 \int_{B_0} P^n f(x)m(dx) \geqslant c_1 + \int_E V(x)(P^{n+1} f(x) - P^n f(x))m(dx), \quad n \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Istotnie, stosując własność (2.1) oraz założenie (2.4) do dowolnej gęstości f otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_E V(x)Pf(x)m(dx) &= \int_E \int_E V(y)\mathcal{P}(x,dy)f(x)m(dx)\\ &\leqslant \int_E V(x)f(x)m(dx) - c_1 + c_2\int_{B_0} f(x)m(dx).\end{aligned}$$

Stąd i z faktu, że $\int_E V(x)f(x)m(dx) < \infty$ wnioskujemy, że

$$\int_E V(x)Pf(x)m(dx) < \infty$$

oraz

$$c_2\int_{B_0} f(x)m(dx) \geqslant c_1 + \int_E V(x)(Pf(x) - f(x))m(dx).$$

Teraz wystarczy przeprowadzić rozumowanie indukcyjne. Sumując stronami nierówność (2.5) i dzieląc przez N i przez c_2 uzyskujemy

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{B_0} P^n f(x)m(dx) \geqslant \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{c_2 N}\int_E V(x)(P^N f(x) - f(x))m(dx).$$

Funkcja V jest nieujemna, więc szacujemy

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{B_0} P^n f(x)m(dx) \geqslant \frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{c_2 N}\int_E V(x)f(x)m(dx),$$

co daje

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{B_0} P^n f(x)m(dx) \geqslant \frac{c_1}{c_2} > 0.$$

W dalszej części przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że dla dowolnej gęstości f mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_0} P^n f(x)m(dx) = 0.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{B_0} P^n f(x)m(dx) = 0,$$

co przeczy temu, że $\frac{c_1}{c_2} > 0$. □

Niech $\mathcal{E}_* \subset \mathcal{E}$ będzie daną rodziną mierzalnych podzbiorów zbioru E. Mówimy, że nieujemna i mierzalna funkcja f_* jest *lokalnie całkowalna* względem $\mathcal{E}_*$ jeśli

$$\int_B f_*(x)m(dx) < \infty \quad \text{dla wszystkich } B \in \mathcal{E}_*.$$

Lemat 2.4 ([56, wniosek 3])**.** *Załóżmy, że P jest stochastycznym operatorem preharrisowskim bez gęstości niezmienniczej. Jeżeli P posiada taką funkcję podniezmienniczą f_*, że $f_* > 0$ p.w. i f_* jest lokalnie całkowalna względem rodziny $\mathcal{E}_*$, to operator P jest wymiatający z rodziny zbiorów $\mathcal{E}_*$.*

2.3 Półgrupy operatorów

Rodzinę podstochastycznych (stochastycznych) operatorów $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ na przestrzeni L^1, która jest C_0-*półgrupą*, tzn.

(1) $P(0) = I$ (operator identycznościowy);

(2) $P(t+s) = P(t)P(s)$ dla każdych $s, t \geqslant 0$;

(3) Dla każdej $f \in L^1$ odwzorowanie $t \mapsto P(t)f$ jest ciągłe: dla każdego $s \geqslant 0$

$$\lim_{t\to s^+} \|P(t)f - P(s)f\| = 0;$$

nazywamy *półgrupą podstochastyczną (stochastyczną)*.

Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą podstochastyczną na L^1. *Generatorem* infinitezymalnym półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest z definicji operator A z dziedziną $\mathcal{D}(A) \subset L^1$ określony następująco

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^1 : \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P(t)f - f) \text{ istnieje}\},$$
$$Af = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P(t)f - f), \quad f \in \mathcal{D}(A).$$

Operator A jest domknięty, a $\mathcal{D}(A)$ jest zbiorem gęstym w L^1. Jeżeli dla pewnej liczby rzeczywistej λ operator $\lambda - A := \lambda I - A$ jest różnowartościowy, na, oraz $(\lambda - A)^{-1}$ jest ograniczonym operatorem liniowym, wówczas mówimy, że λ należy do zbioru rezolwenty $\rho(A)$, a $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ nazywamy *rezolwentą operatora A w punkcie λ*. Jeżeli A jest generatorem półgrupy podstochastycznej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, to $(0, \infty) \subset \rho(A)$ i otrzymujemy całkową reprezentację

$$R(\lambda, A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P(s)f\, ds \quad \text{dla} \quad f \in L^1.$$

Operator $\lambda R(\lambda, A)$ jest podstochastyczny oraz $R(\mu, A)f \leqslant R(\lambda, A)f$ dla $\mu > \lambda > 0$, $f \in L^1_+$. Dla ogólnej teorii półgrup podstochastycznych odsyłamy do [7, 58].

Dla danego operatora $(A, \mathcal{D}(A))$ symbolami $\ker(A)$ oraz $\mathrm{Im}(A)$ oznaczać będziemy odpowiednio jądro oraz obraz tego operatora. Mamy

$$\ker(A) = \{f \in \mathcal{D}(A) : Af = 0\}, \quad \mathrm{Im}(A) = \{Af : f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Lemat 2.5. *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą podstochastyczną z generatorem $(A, \mathcal{D}(A))$ oraz niech $f \in L^1$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *$P(t)f = f$ dla wszystkich $t > 0$,*

(2) *$f \in \ker(A)$,*

(3) $\lambda R(\lambda, A)f = f$ *dla pewnego* $\lambda > 0$ *(dla wszystkich* $\lambda > 0$*).*

Dowód. Jeżeli $P(t)f = f$ dla wszystkich $t > 0$, to

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P(t)f - f) = 0,$$

czyli $f \in \mathcal{D}(A)$ i $Af = 0$, a implikację odwrotną otrzymujemy z warunku

$$P(t)f = f + \int_0^t P(s)Af ds \tag{2.6}$$

zachodzącego dla wszystkich $f \in \mathcal{D}(A)$ oraz $t > 0$.

Jako, że

$$AR(\lambda, A)f = \lambda R(\lambda, A)f - f \tag{2.7}$$

dla wszystkich $f \in L^1$, to $AR(\lambda, A)f = 0$ oraz $R(\lambda, A)f \in \mathcal{D}(A)$, czyli $f = \lambda R(\lambda, A)f \in \mathcal{D}(A)$ i $Af = \lambda AR(\lambda, A)f = 0$. Z całkowej reprezentacji operatora rezolwenty oraz z (1) wnosimy, że zachodzi (3) dla wszystkich $\lambda > 0$. □

Podamy teraz charakteryzację elementów z obrazu generatora.

Twierdzenie 2.6 ([38, twierdzenie 3.1])**.** *Niech* $(A, \mathcal{D}(A))$ *będzie generatorem półgrupy podstochastycznej* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. *Wówczas*

$$\mathrm{Im}(A) = \{f \in L^1 : \sup_{t\geqslant 0} \Big\| \int_0^t P(s)f\, ds \Big\| < \infty\}$$

W oparciu o [67, rozdział VIII.4] udowodnimy następujący rezultat.

Lemat 2.7. *Niech* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie półgrupą podstochastyczną z generatorem* $(A, \mathcal{D}(A))$. *Wówczas* $f \in \overline{\mathrm{Im}(A)}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda R(\lambda, A)f = 0. \tag{2.8}$$

Dowód. Jeżeli spełnione jest (2.8), to

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \|f - AR(\lambda, A)f\| = \lim_{\lambda\downarrow 0} \|\lambda R(\lambda, A)f\| = 0,$$

czyli $f \in \overline{\mathrm{Im}(A)}$. Załóżmy teraz, że dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdziemy takie $g \in \mathrm{Im}(A)$, że $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. Skoro operator $\lambda R(\lambda, A)$ jest podstochastyczny, to

$$\|\lambda R(\lambda, A)f\| \leqslant \|\lambda R(\lambda, A)g\| + \|\lambda R(\lambda, A)(f - g)\| \leqslant \|\lambda R(\lambda, A)g\| + \varepsilon.$$

Z drugiej strony, znajdziemy takie $g_1 \in \mathcal{D}(A)$, że $g = Ag_1$. Jako że

$$\|\lambda R(\lambda, A)g\| = \|\lambda(\lambda R(\lambda, A)g_1 - g_1)\| \leqslant 2\lambda\|g_1\|,$$

to otrzymujemy

$$\limsup_{\lambda\downarrow 0} \|\lambda R(\lambda, A)f\| \leqslant \varepsilon,$$

co, wobec dowolności ε, kończy dowód. □

2.4 Asymptotyka półgrup

Mówimy, że nieujemna i mierzalna funkcja jest *podniezmiennicza (niezmiennicza)* dla półgrupy podstochastycznej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jeżeli jest podniezmiennicza (niezmiennicza) dla każdego operatora $P(t)$.

Lemat 2.8 ([39, wniosek 7.12.1]). *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą stochastyczną. Jeżeli dla pewnego $s > 0$ operator $P(s)$ ma gęstość niezmienniczą f_*, to*

$$\tilde{f}_* = \frac{1}{s}\int_0^s P(t)f_* dt$$

jest gęstością niezmienniczą dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Półgrupę stochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nazywamy *asymptotycznie stabilną* jeżeli ma taką gęstość niezmienniczą f_*, że

$$\lim_{t\to\infty} \|P(t)f - f_*\| = 0 \quad \text{dla wszystkich } f \in D(m),$$

natomiast *częściowo całkową*, jeżeli dla pewnego $s > 0$, operator $P(s)$ jest częściowo całkowy.

Twierdzenie 2.9 ([54, twierdzenie 2]). *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie częściowo całkową półgrupą stochastyczną. Załóżmy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma tylko jedną gęstość niezmienniczą f_*. Jeżeli $f_* > 0$ p.w., to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

Uogólnienia twierdzenia 2.9 można znaleźć w [55] jak również w [58]. Zauważmy, że jeśli półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna, to dla każdego $s > 0$ operator $P(s)$ jest ściśle średnio ergodyczny. Zatem z wniosku 2.1 wynika

Wniosek 2.10. *Załóżmy, że półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna z gęstością niezmienniczą f_*. Jeżeli $\tilde{f}_*$ jest podniezmiennicza względem $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ oraz $m(\operatorname{supp} f_* \cap \{x : \tilde{f}_*(x) < \infty\}) > 0$, to $\tilde{f}_* \in L^1$.*

Półgrupę stochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nazywamy *wymiatającą* ze zbiorów rodziny $\mathcal{E}_*$ jeśli

$$\lim_{t\to\infty} \int_B P(t)f(x)m(dx) = 0 \quad \text{dla wszystkich } f \in D(m), B \in \mathcal{E}_*.$$

Twierdzenie 2.11 ([39, twierdzenie 7.11.1]). *Niech $\mathcal{E}_* \subset \mathcal{E}$ będzie rodziną zbiorów mierzalnych, a $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ półgrupą stochastyczną. Jeżeli dla pewnego $s > 0$ operator $P(s)$ jest wymiatający ze zbiorów rodziny $\mathcal{E}_*$, to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest wymiatająca ze zbiorów rodziny $\mathcal{E}_*$.*

Półgrupę podstochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nazywamy *silnie stabilną* jeżeli

$$\lim_{t\to\infty} P(t)f = 0 \quad \text{dla wszystkich } f \in L^1.$$

Zauważmy, że półgrupa stochastyczna nie może być silnie stabilna, gdyż zachowuje normę elementów nieujemnych. Twierdzenie ergodyczne dla półgrup oraz addytywność normy w L^1 dają następującą charakteryzację (zobacz [19, twierdzenia 2.1, 7.7]).

Twierdzenie 2.12 ([19])**.** *Niech* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie półgrupą podstochastyczną na* L^1 *z generatorem* $(A, \mathcal{D}(A))$*. Wówczas* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest silnie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Im}(A)$ *jest gęsty w* L^1*.*

Rozdział 3

Istnienie gęstości niezmienniczych dla półgrup stochastycznych

3.1 Twierdzenie perturbacyjne Kato

W tej części rozważamy problem istnienia gęstości niezmienniczych dla półgrup podstochastycznych na L^1. Przywołajmy najpierw kilka oznaczeń oraz uogólnienie twierdzenia perturbacyjnego Kato [35].

W całym tym rozdziale zakładamy, że P jest operatorem stochastycznym na L^1, $\varphi\colon E \to [0,\infty)$ jest funkcją mierzalną oraz, że $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą podstochastyczną z takim generatorem $(A,\mathcal{D}(A))$, że

$$(3.1) \qquad \mathcal{D}(A) \subseteq L^1_\varphi \quad \text{i} \quad \int_E Af(x)\, m(dx) = -\int_E \varphi(x)f(x)\, m(dx)$$

dla $f \in \mathcal{D}(A)_+ = \mathcal{D}(A) \cap L^1_+$, gdzie

$$L^1_\varphi = \{f \in L^1 : \int_E \varphi(x)|f(x)|m(dx) < \infty\}.$$

Naszym punktem wyjścia będzie następujący wynik generowania [35, 64, 2, 5, 7] dla operatora

$$(3.2) \qquad \mathcal{G}f = Af + P(\varphi f) \quad \text{dla} \quad f \in \mathcal{D}(A).$$

Twierdzenie 3.1. *Istnieje taka półgrupa podstochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ na L^1, że generator $(G,\mathcal{D}(G))$ półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest* rozszerzeniem *operatora opisanego równaniem* (3.2), *tzn.,*

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(G) \quad i \quad Gf = \mathcal{G}f \quad dla \quad f \in \mathcal{D}(A),$$

generator G półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest scharakteryzowany przez

$$(3.3) \qquad R(\lambda,G)f = \lim_{n\to\infty} R(\lambda,A)\sum_{k=0}^{n}(P(\varphi R(\lambda,A)))^k f, \quad f \in L^1, \lambda > 0,$$

i półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest* minimalna*, tzn. jeżeli* $\{\bar{P}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest inną półgrupą z generatorem będącym rozszerzeniem operatora* $(\mathcal{G},\mathcal{D}(A))$*, to* $\bar{P}(t)f \geqslant P(t)f$ *dla każdej funkcji* $f \in L^1_+$.

Ponadto następujące warunki są równoważne:

(1) $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest półgrupą stochastyczną.*

(2) *Generator* G *jest domknięciem operatora* $(\mathcal{G},\mathcal{D}(A))$.

(3) *Dla pewnej liczby* $\lambda > 0$ *i dla wszystkich* $f \in L^1$

$$\lim_{n\to\infty} \|(P(\varphi R(\lambda, A)))^n f\| = 0. \tag{3.4}$$

Podamy teraz równoważne warunki na to aby minimalna półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ była stochastyczna.

Twierdzenie 3.2 ([62])**.** *Niech* $\lambda > 0$*. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest półgrupą stochastyczną.*

(2) *Operator* $P(\varphi R(\lambda, A))$ *jest średnio ergodyczny.*

(3) *Istnieje taka funkcja* $f \in L^1_+$*, że* $f > 0$ *p.w. oraz spełniony jest warunek* (3.4).

(4) $m\{x \in E : f_\lambda(x) > 0\} = 0$*, gdzie*

$$f_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} (P(\varphi R(\lambda, A)))^{*n} 1(x), \tag{3.5}$$

a $(P(\varphi R(\lambda, A)))^*$ *jest operatorem sprzężonym do operatora* $P(\varphi R(\lambda, A))$.

Uwaga 3.3. Można pokazać, że (patrz np. [61]) operator $(\mathcal{G},\mathcal{D}(A))$ jest generatorem półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej liczby $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|(P(\varphi R(\lambda, A)))^n\| = 0.$$

W szczególności, powyższy warunek jest spełniony, gdy φ jest ograniczona.

Wykorzystywać będziemy również operator podstochastyczny $K\colon L^1 \to L^1$ określony następująco

$$Kf = \lim_{\lambda\downarrow 0} P(\varphi R(\lambda, A))f \quad \text{dla } f \in L^1. \tag{3.6}$$

Twierdzenie 3.4 ([62])**.** *Niech* K *będzie jak w* (3.6).

(1) *Operator* K *jest stochastyczny wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa* $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ *generowana przez* A *jest silnie stabilna.*

(2) *Jeżeli* K *jest średnio ergodyczny, to półgrupa minimalna* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *z twierdzenia 3.1 jest stochastyczna.*

3.2 Istnienie gęstości niezmienniczych dla półgrupy minimalnej

W rozdziale tym analizujemy związki pomiędzy gęstościami niezmienniczymi operatora K określonego zależnością (3.6) oraz gęstościami niezmienniczymi półgrupy minimalnej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Nasz pierwszy główny wynik w tej sekcji jest następujący.

Twierdzenie 3.5. *Załóżmy, że operator K ma gęstość podniezmienniczą f_* oraz niech*

$$\overline{f}_* = \sup_{\lambda>0} R(\lambda, A)f_*. \tag{3.7}$$

Wówczas $\overline{f}_*$ jest podniezmiennicza dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. W szczególności, jeśli $\overline{f}_* \in L^1$ i półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna, to półgrupa ta ma gęstość niezmienniczą.

Dowód. Niech $f_\lambda = R(\lambda, A)f_*$ dla $\lambda > 0$. Jako, że $R(\lambda, A)$ jest rezolwentą półgrupy podstochastycznej, mamy $f_\lambda \geqslant 0$, $f_\lambda \uparrow \overline{f}_*$ oraz $\overline{f}_*$ jest nietrywialna. Z definicji (3.6) wynika, że $P(\varphi R(\lambda, A))f_* \leqslant Kf_* \leqslant f_*$. Mamy $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(G)$ i $Gf = Af + P(\varphi f)$ dla $f \in \mathcal{D}(A)$. Zatem

$$GR(\lambda, A)f = \lambda R(\lambda, A)f + P(\varphi R(\lambda, A))f - f$$

dla każdej funkcji $f \in L^1$, co implikuje, że $Gf_\lambda \leqslant \lambda f_\lambda$ dla każdej liczby $\lambda > 0$. Półgrupa $e^{-\mu t}P(t)$ ma generator $(G - \mu, \mathcal{D}(G))$, zatem

$$f - e^{-\mu t}P(t)f = \int_0^t e^{-\mu s}P(s)(\mu - G)f ds$$

dla wszystkich $t, \mu > 0$ i $f \in \mathcal{D}(G)$. Jako, że $(\mu - G)f_\lambda \geqslant (\mu - \lambda)f_\lambda \geqslant 0$ dla wszystkich $\mu \geqslant \lambda > 0$, więc otrzymujemy

$$f_\lambda - e^{-\mu t}P(t)f_\lambda \geqslant 0$$

dla każdego $\mu \geqslant \lambda > 0$ i $t > 0$. Konsekwentnie

$$P(t)f_\lambda \leqslant e^{\mu t}f_\lambda \leqslant e^{\mu t}\overline{f}_*.$$

Przechodząc po obu stronach do punktowych granic, gdy $\lambda \downarrow 0$ a następnie przechodząc z $\mu \downarrow 0$ otrzymujemy, że $\overline{f}_*$ jest podniezmiennicza dla $P(t)$. W końcu, jeżeli $P(t)$ jest stochastyczna oraz $\overline{f}_* \in L^1$, to $\|\overline{f}_*\| > 0$ i $\overline{f}_*/\|\overline{f}_*\|$ jest gęstością niezmienniczą dla $P(t)$. □

Podamy teraz użyteczną obserwację.

Wniosek 3.6. *Jeżeli operator K ma gęstość podniezmienniczą f_* i $f_* > 0$ p.w., to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna oraz $\overline{f}_*$ zdefiniowane jak w (3.7) spełnia $\overline{f}_* > 0$ p.w.*

Dowód. Jako, że $Kf_* \leqslant f_*$ i $f_* > 0$ p.w., to operator K jest średnio ergodyczny. Zatem $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna. Mamy $\overline{f}_* \geqslant R(\lambda, A)f_*$ dla $\lambda > 0$. Jako, że $R(\lambda, A)$ jest nieujemnym i ograniczonym operatorem o gęstym obrazie, więc otrzymujemy $R(\lambda, A)f_* > 0$ p.w. □

Uwaga 3.7. Zauważmy, że jeżeli półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma gęstość niezmienniczą $\tilde{f}$ oraz $\tilde{f} > 0$ p.w., to $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna. Aby to potwierdzić sprawdzimy, że spełniony jest warunek (3) twierdzenia 3.1. Z [62, uwagi 3.3] otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\|R(1, G)f\| &= \lim_{n\to\infty} \|R(1, A) \sum_{k=0}^{n} (P(\varphi R(1, A)))^k f\| \\ &= \lim_{n\to\infty} (\|f\| - \|(P(\varphi R(1, A)))^{n+1} f\|)\end{aligned}$$

dla wszelkich $f \in L^1_+$. Z drugiej strony mamy $R(1, G)\tilde{f} = \tilde{f}$, co dowodzi tego, że $\tilde{f} \in L^1_+$, $\tilde{f} > 0$ p.w. i $\tilde{f}$ spełnia równość (3.4).

Uwaga 3.8. Założenie o całkowalności podniezmienniczej funkcji f_* w twierdzeniu 3.5 jest istotne, co pokazuje następujący przykład [35, przykład 4.3]. Niech E będzie zbiorem liczb całkowitych i niech m będzie miarą liczącą na $E = \mathbb{Z}$, czyli $L^1 = l^1(\mathbb{Z})$. Rozważmy $Af = -\varphi f$, gdzie φ jest taką funkcją nieujemną, że

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\varphi(k)} < \infty.$$

Półgrupa postaci

$$S(t)f(x) = e^{-t\varphi(x)} f(x),$$

generowana przez $Af = -\varphi f$, $f \in L^1_\varphi$, ma operator rezolwenty $R(\lambda, A)f = f/(\lambda + \varphi)$, $\lambda > 0$. Niech P będzie operatorem Frobeniusa-Perrona odpowiadającym $T(x) = x + 1$ tak, że $Pf(x) = f(x - 1)$. Mamy $K = P$ oraz $Kf_* = f_*$ dla $f_* \equiv 1$. Zatem $\overline{f}_* = \sup_{\lambda>0} R(\lambda, A)f_* = 1/\varphi$ i $\overline{f}_* \in l^1(\mathbb{Z})$. Operator

$$\mathcal{G}f(x) = -\varphi(x)f(x) + \varphi(x - 1)f(x - 1),$$

o maksymalnej dziedzinie $\mathcal{D}_{\max} = \{f \in l^1(\mathbb{Z}) : \mathcal{G}f \in l^1(\mathbb{Z})\}$ jest rozszerzeniem generatora G półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ (patrz np. [35, twierdzenie 1.1]). Mamy więc $\overline{f}_* \in \mathcal{D}_{\max}$ oraz $\mathcal{G}\overline{f}_* = 0$. Udowodnimy, w oparciu o warunek (4) twierdzenia 3.2, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nie jest stochastyczna. Pokażemy więc, że

$$m\{x \in E : \lim_{n\to\infty} (P(\varphi R(1, A)))^{*n} 1_E(x) > 0\} > 0. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że

$$(P(\varphi R(1, A)))^* f(x) = \frac{\varphi(x)}{1 + \varphi(x)} f(x + 1),$$

dla każdej ograniczonej funkcji f. Stąd i z nierówności $\ln(1+z) \geqslant \frac{z}{1+z}$, $z \geqslant 1$ uzyskujemy

$$(P(\varphi R(1,A)))^{*n}1_E(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(x+k)}{1+\varphi(x+k)} \geqslant \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\varphi(x+k)}\right),$$

co kończy dowód (3.8) wobec własności funkcji φ. Zatem $\overline{f}_* \notin D(G)$, bo w przeciwnym wypadku $\overline{f}_*$ byłaby ściśle dodatnią gęstością niezmienniczą dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, z czego, na mocy uwagi 3.7, wynikałoby, że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna.

Teraz przedyskutujemy problem całkowalności $\overline{f}_*$ zadanej przez (3.7).

Wniosek 3.9. *Niech $\overline{f}_*$ będzie zdefiniowane tak, jak w* (3.7). *Jeśli* $0 \in \rho(A)$, *to* $\overline{f}_* \in L^1$. *W szczególności, jeżeli funkcja φ jest odgraniczona od* 0, *to* $\overline{f}_* \in L^1$.

Dowód. Jeśli $0 \in \rho(A)$, to $R(0,A) = -A^{-1}$ jest operatorem ograniczonym oraz $R(0,A) = \sup_{\lambda>0} R(\lambda, A)$, co implikuje, że $\overline{f}_* \in L^1$. Przypuśćmy teraz, że istnieje dodatnia stała $\underline{\varphi}$ taka, że $\varphi \geqslant \underline{\varphi}$. Z własności (3.1) wynika, że

$$\int_E Af(x)m(dx) \leqslant -\underline{\varphi}\|f\|$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{D}(A)_+$. Zatem operator $(A+\underline{\varphi}, \mathcal{D}(A))$ jest generatorem półgrupy podstochastycznej $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ (patrz np. [61, lemat 4.3]). Z drugiej strony, $T(t) = e^{\underline{\varphi}t}S(t)$ dla każdego $t > 0$, co dowodzi, że $\|S(t)f\| \leqslant e^{-\underline{\varphi}t}\|f\|$ dla wszystkich $f \in L^1$ i $t > 0$. Zatem $0 \in \rho(A)$. □

Generator A może nie mieć ograniczonego operatora odwrotnego, ale jeżeli półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest silnie stabilna, to A zawsze ma gęsto zdefiniowany operator odwrotny. Teraz przywołamy jego definicję i podamy potrzebne dalej własności. Niech operator $R_0 \colon \mathcal{D}(R_0) \to L^1$ będzie zdefiniowany przez

$$\begin{aligned} R_0 f &= \int_0^\infty S(s)f\,ds := \lim_{t\to\infty} \int_0^t S(s)f\,ds, \\ \mathcal{D}(R_0) &= \{f \in L^1 \colon \int_0^\infty S(s)f\,ds \text{ istnieje}\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lemat 3.10. *Niech* $(R_0, \mathcal{D}(R_0))$ *będzie określony przez* (3.9). *Wówczas* $\operatorname{Im}(R_0) \subseteq \mathcal{D}(A)$, $AR_0 f = -f$ *dla* $f \in \mathcal{D}(R_0)$ *oraz*

$$\mathcal{D}(R_0) \subseteq \operatorname{Im}(A) = \{f \in L^1 : \sup_{t\geqslant 0}\Big\|\int_0^t S(s)f\,ds\Big\| < \infty\},$$

gdzie $\operatorname{Im}(A) = \{Af : f \in \mathcal{D}(A)\}$ *jest obrazem operatora* A.

Ponadto, jeżeli półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest silnie stabilna, to* $\mathcal{D}(R_0)$ *jest gęsty,* $\operatorname{Im}(A) \subseteq \mathcal{D}(R_0)$, $R_0 Af = -f$ *dla* $f \in \mathcal{D}(A)$ *oraz*

$$R_0 f = \lim_{\lambda\downarrow 0} R(\lambda, A)f, \quad f \in \mathcal{D}(R_0).$$

Dowód. Dla dowodu pierwszej części lematu, ustalmy dowolnie $f \in \mathcal{D}(R_0)$. Wtedy $S(t)f \in \mathcal{D}(R_0)$, $t \geqslant 0$. więc

$$(S(t) - I)R_0 f = \int_t^\infty S(s)f\,ds - \int_0^\infty S(s)f\,ds = -\int_0^t S(s)f\,ds.$$

Funkcja $s \mapsto S(s)f$ jest ciągła, a zatem

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\,ds \to S(0)f = f, \quad t \downarrow 0.$$

Czyli $R_0 f \in \mathcal{D}(A)$, $AR_0 f = -f$, a charakteryzacja obrazu $\mathrm{Im}(A)$ wynika z twierdzenia 2.6.

Aby dowieść drugiej części lematu, załóżmy, że półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest silnie stabilna, a $f \in \mathcal{D}(A)$. Mamy

$$S(t)f - f = \int_0^t S(s)Af\,ds \quad \text{dla } f \in \mathcal{D}(A),$$

więc z silnej stabilności $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ otrzymujemy

$$-f = \lim_{t\to\infty}(S(t)f - f) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t S(s)Af\,ds,$$

co pokazuje, że $Af \in \mathcal{D}(R_0)$ oraz $R_0 Af = -f$. Z twierdzenia 2.12 wnioskujemy, że $\mathrm{Im}(A)$ jest gęsty, a zatem gęsty jest również $\mathcal{D}(R_0)$.

W końcu, ustalmy $f \in \mathcal{D}(R_0)$ oraz $\lambda > 0$. Mamy

$$\begin{aligned} R_0 f - R(\lambda, A)f &= R_0 f + R(\lambda, A)AR_0 f \\ &= R_0 f + AR(\lambda, A)R_0 f \\ &= \lambda R(\lambda, A)R_0 f. \end{aligned}$$

Z lematu 2.7 dostajemy

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda R(\lambda, A)R_0 f = 0,$$

co kończy dowód. □

Teraz możemy udowodnić następujący prosty fakt.

Wniosek 3.11. *Niech $(R_0, \mathcal{D}(R_0))$ będzie zdefiniowane jak w (3.9). Załóżmy, że operator K jest stochastyczny. Wówczas K jest jednoznacznie wyznaczonym i ograniczonym rozszerzeniem gęsto zdefiniowanego operatora $(P(\varphi R_0), \mathcal{D}(R_0))$. Ponadto, jeśli f_* jest gęstością niezmienniczą dla K, to $\overline{f}_* = \sup_{\lambda>0} R(\lambda, A)f_* \in L^1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_* \in \mathcal{D}(R_0)$, co determinuje, że $\overline{f}_* = R_0 f_*$ oraz $\overline{f}_* \in \mathcal{D}(A)$.*

Dowód. Mamy $\mathrm{Im}(R_0) \subseteq \mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{D}(A) \subseteq L^1_\varphi$. Niech $f \in \mathcal{D}(R_0)_+$. Z (3.1) wynika, że

$$\|\varphi R_0 f\| = \int \varphi(x) R_0 f(x) m(dx) = -\int A R_0 f(x) m(dx).$$

Jako, że $AR_0 f = -f$, więc otrzymujemy $\|\varphi R_0 f\| = \|f\|$. Operator mnożenia $M_\varphi \colon L^1_\varphi \to L^1$ zdefiniowany jako $M_\varphi f = \varphi f$ dla $f \in \mathcal{D}(M_\varphi) = L^1_\varphi$ jest domknięty. Jako, że $R_0 f = \lim_{\lambda \downarrow 0} R(\lambda, A) f$ oraz $R_0 f \in L^1_\varphi$, otrzymujemy, że $\lim_{\lambda\downarrow 0} \varphi R(\lambda, A) f = \varphi R_0 f$. Zatem $Kf = P(\varphi R_0 f)$ i teza wynika z lematu 3.10. □

3.3 Twierdzenia odwrotne

Udowodnimy twierdzenie częściowo odwrotne do twierdzenia 3.5.

Twierdzenie 3.12. *Załóżmy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma gęstość podniezmienniczą $\tilde{f}_* \in \mathcal{D}(G)$. Wówczas $P(\varphi \tilde{f}_*) < \infty$ p.w. i $P(\varphi \tilde{f}_*)$ jest podniezmiennicza dla operatora K. Ponadto, jeśli $\varphi \tilde{f}_* \in L^1$, to $\tilde{f}_* \in \mathcal{D}(A)$.*

Dowód. Ustalmy $\lambda > 0$ i niech $f_0 = \lambda \tilde{f}_* - G\tilde{f}_*$. Jako, że $e^{-\lambda t} P(t)\tilde{f}_* \leqslant \tilde{f}_*$ dla każdego $t > 0$, więc otrzymujemy $G\tilde{f}_* \leqslant \lambda \tilde{f}_*$. Zatem $f_0 \in L^1_+$. Zdefiniujmy

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} (P(\varphi R(\lambda, A)))^k f_0 \quad \text{i} \quad \tilde{f}_n = R(\lambda, A) f_n, \quad n \geqslant 0.$$

Z równania (3.3) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A) f_n = R(\lambda, G)(f_0) = \tilde{f}_*.$$

Mamy $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \in L^1_+$, $n \geqslant 0$ oraz $\sup_n f_n < \infty$ p.w. (patrz np. [7, lemat 6.17]). Ponadto, $0 \leqslant \tilde{f}_n \leqslant \tilde{f}_{n+1} \in \mathcal{D}(A)$, $n \geqslant 0$ i $\sup_n \tilde{f}_n = \tilde{f}_* \in L^1_+$. Zatem otrzymujemy

$$P(\varphi \tilde{f}_n) = P(\varphi R(\lambda, A)) f_n = f_{n+1} - f_0 \in L^1_+,$$

co daje

$$P(\varphi \tilde{f}_*) = \sup_n P(\varphi \tilde{f}_n) = \sup_n f_n - f_0. \tag{3.10}$$

W konsekwencji, $P(\varphi \tilde{f}_*) < \infty$ p.w. Jako, że $\lambda R(\lambda, A)$ jest podstochastyczny, więc operator $R(\lambda, A)$ może zostać rozszerzony na przestrzeń nieujemnych funkcji mierzalnych przyjmując

$$R(\lambda, A) f = \sup_n R(\lambda, A) f_n, \quad \text{jeśli } f = \sup_n f_n.$$

Implikuje to nierówność

$$R(\lambda, A) P(\varphi \tilde{f}_*) \leqslant R(\lambda, A) f = \tilde{f}_*.$$

Jako, że $\varphi R(\lambda, A)P(\varphi \tilde{f}_n) \leqslant \varphi R(\lambda, A)P(\varphi \tilde{f}_{n+1}) \in L^1_+$, więc wnioskujemy, że

$$P(\varphi R(\lambda, A))(P(\varphi \tilde{f}_*)) = \sup_n P(\varphi R(\lambda, A)P(\varphi \tilde{f}_n)) \leqslant P(\varphi \tilde{f}_*),$$

co daje nam $K(P(\varphi \tilde{f}_*)) \leqslant P(\varphi \tilde{f}_*)$ i kończy dowód pierwszej części tezy. Załóżmy teraz, że $\varphi \tilde{f}_* \in L^1$. Wynika stąd, że $P(\varphi \tilde{f}_*) \in L^1$ oraz, korzystając z (3.10), $f \in L^1$. Zatem $\tilde{f}_* = R(\lambda, A)f \in \mathcal{D}(A)$. □

Wniosek 3.13. *Załóżmy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma gęstość niezmienniczą $\tilde{f}_*$. Wówczas $P(\varphi \tilde{f}_*)$ jest podniezmiennicza dla operatora K. Ponadto, jeżeli $\varphi \tilde{f}_* \in L^1$ oraz K jest stochastyczny, to $\|\varphi \tilde{f}_*\| > 0$ i $P(\varphi \tilde{f}_*)/\|\varphi \tilde{f}_*\|$ jest gęstością niezmienniczą dla K.*

Dowód. Z lematu 2.5 dostajemy $\tilde{f}_* \in \mathcal{D}(G)$ i $G\tilde{f}_* = 0$. Z twierdzenia 3.12 otrzymujemy, że $\tilde{f}_* \in \mathcal{D}(A)$, a zatem $G\tilde{f}_* = A\tilde{f}_* + P(\varphi \tilde{f}_*) = 0$. Przypuśćmy, że $\|P(\varphi \tilde{f}_*)\| = 0$. Wówczas $A\tilde{f}_* = 0$, skąd wynika, że $\tilde{f}_* \in \ker(A)$. Wiemy, że A generatorem półgrupy $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, a operator K jest stochastyczny. Z twierdzenia 3.4 wnosimy, że półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest silnie stabilna. Zatem $\ker(A) = \{0\}$ i wnioskujemy stąd, że $\tilde{f}_* = 0$, co stoi w sprzeczności z faktem, że $\|\tilde{f}_*\| = 1$ i jednocześnie kończy dowód tego, że f_* jest gęstością. Ponieważ K jest stochastyczny, więc podniezmiennicza f_* jest niezmiennicza. □

Przedstawiamy następujący wynik, który jest użyteczny w połączeniu z twierdzeniem 2.9.

Wniosek 3.14. *Załóżmy, że operator K jest stochastyczny i ściśle średnio ergodyczny z gęstością niezmienniczą f_*. Wówczas półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna, może mieć co najwyżej jedną gęstość niezmienniczą oraz $\varphi \tilde{f}_* \in L^1$ dla dowolnej gęstości niezmienniczej $\tilde{f}_*$. Ponadto, jeżeli $R_0 f_* \in L^1$, gdzie R_0 jest zdefiniowane jak w* (3.9)*, to $R_0 f_*/\|R_0 f_*\|$ jest jedyną gęstością niezmienniczą dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

Dowód. Korzystając z twierdzenia 3.12 otrzymujemy, że jeśli f jest gęstością niezmienniczą dla $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, to $P(\varphi f) < \infty$ p.w. oraz $K(P(\varphi f)) \leqslant P(\varphi f)$. Z wniosku 2.1 mamy $P(\varphi f) \in L^1$, a stąd wynika, że $\varphi f \in L^1$. Zatem $f \in \mathcal{D}(A)$ i z wniosku 3.13 otrzymujemy, że $f_* = P(\varphi f)/\|\varphi f\|$ jest gęstością niezmienniczą dla K. Przypuśćmy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma dwie gęstości niezmiennicze f_1, f_2. Mamy więc $Gf_1 = 0 = Gf_2$ i $Gf = Af + P(\varphi f)$ dla $f \in \mathcal{D}(A)$. Jako, że f_* jest jedyną gęstością niezmienniczą dla operatora K, więc otrzymujemy

$$\frac{P(\varphi f_1)}{\|\varphi f_1\|} = \frac{P(\varphi f_2)}{\|\varphi f_2\|}.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{Af_1}{\|\varphi f_1\|} = \frac{Af_2}{\|\varphi f_2\|}.$$

Operator K jest stochastyczny, zatem $\ker(A) = \{0\}$ na podstawie twierdzenia 3.4. Konsekwentnie

$$\frac{f_1}{\|\varphi f_1\|} = \frac{f_2}{\|\varphi f_2\|}$$

oraz $f_1 = f_2$, ponieważ $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. Ostatnia część wynika z twierdzenia 3.5. □

Uwaga 3.15. Zauważmy, że jeżeli funkcja φ jest ograniczona, to we wniosku 3.14 można pominąć założenie, że operator K jest średnio ergodyczny. Rzeczywiście, wówczas automatycznie otrzymujemy, że półgrupa jest stochastyczna oraz $P(\varphi f) \in L^1$ dla wszystkich $f \in L^1_+$. W zamian możemy założyć tylko, że operator K ma jednoznacznie wyznaczoną gęstość niezmienniczą f_*.

Rozdział 4

Gęstości niezmiennicze dla kawałkami deterministycznych procesów Markowa

4.1 Półgrupy minimalne dla KDPM

Przywołajmy najpierw zależność pomiędzy minimalnymi KDPM a minimalnymi półgrupami przedstawioną w [62, sekcji 5.2] (patrz również [58]). Niech $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie minimalnym KDPM na E o charakterystykach $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$ i niech m będzie σ-skończoną miarą na $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Załóżmy, że $P\colon L^1 \to L^1$ jest takim operatorem przejścia odpowiadającym $\mathcal{P}$, że półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, z generatorem $(A, \mathcal{D}(A))$ spełniającym (3.1) jest taka, że

$$\int_E e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr} 1_B(\pi_t x) f(x)\, m(dx) = \int_B S(t)f(x)\, m(dx) \tag{4.1}$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$, $f \in L^1_+$, $B \in \mathcal{E}$. Zauważmy, że jeśli φ spełnia warunek (1.3), to półgrupa $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest silnie stabilna, gdyż dla $f \in L^1_+$ mamy z (4.1) i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)f\| = \int_E \lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr} 1_B(\pi_t x) f(x)\, m(dx) = 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 3.1 istnieje minimalna półgrupa podstochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, której generator jest rozszerzeniem operatora $\mathcal{D}(A) \ni f \mapsto Af + P(\varphi f)$. Półgrupę $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ z twierdzenia 3.1 będziemy określali jako *minimalną półgrupę na L^1 odpowiadającą* $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$. Następujący wynik łączy twierdzenie 5.2 oraz wniosek 5.3 z [62].

Twierdzenie 4.1 ([62])**.** *Niech (t_n) będzie ciągiem kolejnych momentów skoku i $t_\infty = \lim_{n\to\infty} t_n$ będzie momentem wybuchu dla $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$. Wówczas zachodzą następujące tezy:*

(1) *Operator K zdefiniowany jak w (3.6) jest operatorem przejścia odpowiadającym dyskretnemu procesowi Markowa $(X(t_n))_{n\geqslant 0}$ z jądrem stochastycznym*

$$\mathcal{K}(x,B)=\int_0^\infty \mathcal{P}(\pi_s x,B)\varphi(\pi_s x)e^{-\int_0^s \varphi(\pi_r x)dr}ds,\quad x\in E, B\in\mathcal{B}(E). \tag{4.2}$$

(2) *Dla dowolnego $B\in\mathcal{B}(E)$, gęstości f i $t>0$*

$$\int_B P(t)f(x)m(dx)=\int_E \mathbb{P}_x(X(t)\in B, t<t_\infty)f(x)m(dx).$$

(3) *Półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$m\{x\in E:\ \mathbb{P}_x(t_\infty<\infty)>0\}=0.$$

W tym przypadku, jeśli rozkład $X(0)$ ma gęstość f_0, to $X(t)$ ma gęstość $P(t)f_0$ dla wszystkich $t>0$.

Oto nasz główny wynik w tym rozdziale:

Twierdzenie 4.2. *Załóżmy, że łańcuch $(X(t_n))_{n\geqslant 0}$ posiada tylko jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* absolutnie ciągłą względem m. Jeżeli gęstość $f_*=d\mu_*/dm$ jest ściśle dodatnia p.w. wówczas proces $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest niewybuchający i może mieć co najwyżej jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną absolutnie ciągłą względem m. Ponadto, jeżeli*

$$\mathbb{E}(t_1):=\int_E \mathbb{E}_x(t_1)f_*(x)m(dx)<\infty, \tag{4.3}$$

gdzie $\mathbb{E}_x$ oznacza operator wartości oczekiwanej względem rozkładu $\mathbb{P}_x$ określającego proces startujący w punkcie $X(0)=x$, to proces $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą i jest ona ściśle dodatnia p.w.

Podamy najpierw pomocnicze lematy.

Lemat 4.3. *Niech K będzie operatorem przejścia odpowiadającym jądru stochastycznemu zadanemu równaniem (4.2). Wówczas*

$$Kf=P(\varphi R_0 f),\quad f\in D(m), \tag{4.4}$$

gdzie

$$R_0 f(x)=\int_0^\infty S(t)f(x)dt,\quad f\in D(m), x\in E. \tag{4.5}$$

Ponadto

$$\|\varphi R_0 f\|=\|f\|=1\quad \text{i}\quad \|R_0 f\|=\int_E \mathbb{E}_x(t_1)f(x)m(dx)\quad \text{dla } f\in D(m), \tag{4.6}$$

gdzie t_1 jest pierwszym momentem skoku procesu $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Dowód. Jako, że P jest operatorem przejścia odpowiadającym $\mathcal{P}$, więc aproksymując równanie (4.1) i stosując twierdzenie Fubiniego otrzymujemy

$$\int_B P(\varphi R_0 f)(x)m(dx) = \int_E \mathcal{P}(x,B)\varphi(x)R_0 f(x)m(dx) = \int_E \mathcal{K}(x,B)f(x)m(dx)$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{B}(E)$ i $f \in D(m)$. Podstawiając $B = E$ dostajemy

$$\int_E \varphi(x)R_0 f(x)m(dx) = \int_E f(x)m(dx) = 1.$$

Z twierdzenia Fubiniego oraz z (4.1) dla $B = E$ i dla $f \in L^1_+$ mamy

$$\begin{aligned}\|R_0 f\| &= \int_0^\infty \|S(t)f\|dt = \int_0^\infty \int_E e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr} f(x)\, m(dx)dt \\ &= \int_E \int_0^\infty e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr} dt f(x)\, m(dx).\end{aligned}$$

Rozkład zmiennej t_1 jest postaci (1.4). Zatem

$$\mathbb{E}_x(t_1) = \int_0^\infty \mathbb{P}_x(t_1 > t)dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr} dt,$$

co kończy dowód. $\square$

Lemat 4.4. *Niech K będzie operatorem przejścia odpowiadającym jądru stochastycznemu zadanemu równaniem (4.2) i niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie minimalną półgrupą odpowiadającą $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$. Załóżmy, że K ma gęstość niezmienniczą f_*. Wówczas $\overline{f}_* = R_0 f$ jest podniezmiennicza dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$,*

$$\int_E \varphi(x)\overline{f}_*(x)m(dx) = \int_E f_*(x)m(dx) = 1,$$

oraz każda gęstość niezmiennicza $\tilde{f}_*$ półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ spełnia $m(\operatorname{supp} \tilde{f}_* \cap \{x : R_0 f_*(x) < \infty\}) > 0$.

Dowód. Podstawiając $f = f_*$ otrzymujemy

$$\int_E \varphi(x)R_0 f_*(x)m(dx) = \int_E f_*(x)m(dx) = 1,$$

skąd wnioskujemy, że $\varphi(x)R_0 f_*(x) < \infty$ dla m-p.w. $x \in E$. Zatem $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \{x : R_0 f_*(x) < \infty\}$. Z wniosku 3.14 otrzymujemy, że $\varphi\tilde{f}_* \in L^1$ dla dowolnej gęstości niezmienniczej $\tilde{f}_*$ dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. To, na podstawie wniosku 3.13 implikuje, że $m(\operatorname{supp} \tilde{f}_* \cap \operatorname{supp}\varphi) > 0$. Z twierdzenia 3.5 wynika, że $\overline{f}_* = R_0 f_*$ jest podniezmiennicza dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. W konsekwencji $m(\operatorname{supp} \tilde{f}_* \cap \{x : R_0 f_*(x) < \infty\}) > 0$. $\square$

Zauważmy, że z warunku (3) twierdzenia 4.1 wynika, że proces X jest niewybuchający. Twierdzenie 4.2 jest bezpośrednią konsekwencją następującego wyniku.

Twierdzenie 4.5. *Niech K będzie operatorem przejścia odpowiadającym jądru stochastycznemu zadanemu równaniem* (4.2)*. Załóżmy, że K ma jedyną gęstość niezmienniczą f_* i taką, że $f_* > 0$ p.w. Wówczas półgrupa minimalna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ odpowiadająca $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$ jest stochastyczna i może mieć co najwyżej jedną gęstość niezmienniczą. Ponadto, jeśli spełniony jest warunek* (4.3)*, to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma jedyną gęstość niezmienniczą i jest ona ściśle dodatnia p.w.*

Dowód. Jako, że operator stochastyczny K ma jedyną gęstość niezmienniczą f_* oraz $f_* > 0$ p.w., więc K jest ściśle średnio ergodyczny. Zatem pierwsza teza wynika z wniosku 3.14. Jeżeli ponadto spełniony jest warunek (4.3), to wówczas $R_0 f_* \in L^1$ na mocy lematu 4.3. Zatem $\tilde{f}_* = R_0 f_* / \|R_0 f_*\|$ jest jednoznacznie wyznaczoną gęstością niezmienniczą dla $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. □

Tę sekcję zakończymy poniższą charakteryzacją asymptotyki półgrupy minimalnej.

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że łańcuch $(X(t_n))_{n\geqslant 0}$ posiada tylko jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* absolutnie ciągłą względem m. Załóżmy również, że gęstość $f_* = d\mu_*/dm$ jest ściśle dodatnia p.w. i półgrupa minimalna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa. Wówczas $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek* (4.3)*.*

Dowód. Półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna. Jeżeli spełniony jest warunek (4.3), to twierdzenia 4.2 i 2.9 implikują asymptotyczną stabilność. Jeżeli półgrupa jest asymptotycznie stabilna, to z lematu 4.4 i z wniosku 2.10 otrzymujemy, że $R_0 f_* \in L^1$, co daje warunek (4.3). □

4.2 Warunki wystarczające na istnienie gęstości niezmienniczej

Przypomnijmy, że we wprowadzeniu założyliśmy, że E jest borelowskim podzbiorem $\mathbb{R}^d$, na którym określony jest semiukład π. Odwzorowanie $(t, x_0) \mapsto \pi_t x_0$ jest borelowskie, a także $\pi_0 x = x$ oraz $\pi_{t+s} x = \pi_t(\pi_s x)$, $x \in E$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Rozważmy także przestrzeń metryczną Θ z miarą borelowską ν. Na przestrzeni tej określamy skoki za pomocą funkcji mierzalnych $T_\theta \colon E \to E$, $\theta \in \Theta$ oraz $p_\theta \colon E \to [0, \infty)$, $\theta \in \Theta$ spełniających

$$\int_\Theta p_\theta(x)\, \nu(d\theta) = 1, \quad x \in E.$$

Zakładamy, że odwzorowania $(\theta, x) \mapsto T_\theta(x)$ oraz $(\theta, x) \mapsto p_\theta(x)$ są mierzalne, natomiast funkcje $\pi_t \colon E \to E$ i $T_\theta \colon E \to E$ są niesingularne względem miary Lebesgue'a m na E. Funkcja $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia warunek (1.3). Niech także $L^1 = L^1(E, \mathcal{B}(E), m)$.

Jądro stochastyczne $\mathcal{K}$ w równaniu (4.2) jest opisane zależnością

$$\mathcal{K}(x,B)=\int_0^\infty\int_\Theta 1_B(T_\theta(\pi_s x))p_\theta(\pi_s x)\nu(d\theta)\varphi(\pi_s x)e^{-\int_0^s\varphi(\pi_r x)dr}ds$$

dla $x\in E, B\in\mathcal{B}(E)$, i może być przedstawione w postaci

$$\mathcal{K}(x,B)=\int_{\Theta\times(0,\infty)}1_B(T_{(\theta,s)}(x))k_{(\theta,s)}(x)\nu(d\theta)ds, \tag{4.7}$$

gdzie

$$T_{(\theta,s)}(x)=T_\theta(\pi_s x)\quad \text{i}\quad k_{(\theta,s)}(x)=p_\theta(\pi_s x)\varphi(\pi_s x)e^{-\int_0^s\varphi(\pi_r x)dr} \tag{4.8}$$

dla wszystkich $(\theta,s)\in\Theta\times(0,\infty)$, $x\in E$. Operator przejścia K na L^1 związany z jądrem $\mathcal{K}$ przyjmuje postać, zgodnie z przykładem 2.3

$$Kf=\int_{\Theta\times(0,\infty)}\widehat{T}_{(\theta,s)}(k_{(\theta,s)}f)\nu(d\theta)ds,\quad f\in L^1,$$

gdzie $\widehat{T}_{(\theta,s)}$ jest operatorem Frobeniusa-Perrona dla odwzorowania $T_{(\theta,s)}$.

Mając $\theta^n=(\theta_1,\dots,\theta_n)\in\Theta^n$ oraz $s^n=(s_1,\dots,s_n)\in(0,\infty)^n$ określamy (θ^n,s^n) jako ciąg $(\theta^n,s^n)=(\theta_n,s_n,\dots,\theta_1,s_1)$. Indukcyjnie definiujemy transformacje $T_{(\theta^n,s^n)}$ dla $n\geqslant 1$ za pomocą następujących warunków:

$$T_{(\theta^1,s^1)}(x)=T_{(\theta_1,s_1)}(x),$$
$$T_{(\theta^{n+1},s^{n+1})}(x)=T_{(\theta_{n+1},s_{n+1})}(T_{(\theta^n,s^n)}(x)).$$

Podobnie definiujemy nieujemne funkcje $k_{(\theta^n,s^n)}$:

$$k_{(\theta^1,s^1)}(x)=k_{(\theta_1,s_1)}(x),$$
$$k_{(\theta^{n+1},s^{n+1})}(x)=k_{(\theta_{n+1},s_{n+1})}(T_{(\theta^n,s^n)}(x))k_{(\theta^n,s^n)}(x).$$

W konsekwencji otrzymujemy, że n–ta iteracja jądra stochastycznego $\mathcal{K}^n$ jest postaci

$$\mathcal{K}^n(x,B)=\int_{\Theta^n\times(0,\infty)^n}1_B(T_{(\theta^n,s^n)}(x))k_{(\theta^n,s^n)}(x)\nu^n(d\theta^n)ds^n,$$

gdzie $\nu^n=\nu\times\ldots\times\nu$ oznacza produkt miary ν na Θ^n.

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że oba odwzorowania $(\theta,x)\mapsto T_\theta(x)$ oraz $(\theta,x)\mapsto p_\theta(x)$ są ciągłe, podobnie jak funkcja intensywności φ. Ponadto, niech dla każdych $x\in E$ i $\theta^n\in\Theta^n$ przekształcenie $s^n\mapsto T_{(\theta^n,s^n)}(x)$ będzie różniczkowalne w sposób ciągły i niech $\frac{\partial}{\partial s^n}T_{(\theta^n,s^n)}(x)$ oznacza jego pochodną.

Lemat 4.7. *Niech $x_0\in E$. Załóżmy, że istnieje taki ciąg $(\theta^n,s^n)\in\Theta^n\times(0,\infty)^n$, że $k_{(\theta^n,s^n)}(x_0)>0$, a rząd macierzy pochodnych $\frac{\partial}{\partial s^n}T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$ jest równy d. Wówczas istnieje taka stała $c_0>0$ oraz takie zbiory otwarte U_{x_0}, U_{y_0} zawierające odpowiednio x_0 oraz $y_0=T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$, że dla wszystkich $B\in\mathcal{B}(E)$ i $x\in E$ zachodzi nierówność*

$$\mathcal{K}^n(x,B)\geqslant c_0 1_{U_{x_0}}(x)m(B\cap U_{y_0}).$$

Dowód. Zaadaptujemy na nasze potrzeby dowód lematu 6.3 z publikacji [10]. Jeżeli rząd macierzy $\frac{\partial}{\partial s_n} T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$ jest równy d, to z $s^n = (s_1, \ldots, s_n)$ możemy wybrać d zmiennych $s_{i_1}, \ldots, s_{i_d}$ w taki sposób, że pochodna przekształcenia $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_d}) \mapsto T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$ jest odwracalna. W takim przypadku określamy $u = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_d})$ i bierzemy v jako pozostałe współrzędne s^n. Wówczas, z dokładnością do kolejności współrzędnych, możemy zapisać s^n jako (u, v). Ponadto przyjmijmy oznaczenie w dla θ^n. Z założenia otrzymujemy, że istnieje takie $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, że $k_{(\bar{w},(\bar{u},\bar{v}))}(x_0) > 0$ i rząd $\frac{\partial}{\partial(u,v)} T_{(w,(u,v))}(x_0)$ jest równy d dla $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$. Identyfikujemy więc każdy z s^n z tym szczególnym wyborem współrzędnych u i v. Jako że rząd jest funkcją półciągłą z dołu, więc rząd $\frac{\partial}{\partial(u,v)} T_{(w,(u,v))}(x)$ jest równy d w otoczeniu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, x_0. Dla (u, v) określamy odwzorowanie $Q = Q_{x,w}$ wzorem

$$Q(u, v) = (T_{(w,(u,v))}(x), v).$$

Zatem, wyznacznik macierzy $\left[\frac{\partial}{\partial(u,v)} Q\right]$ jest niezerowy w otoczeniu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, x_0.

Możemy zapisać jądro $\mathcal{K}^n$ w postaci

$$\mathcal{K}^n(x, B) = \int_{\Theta^n \times (0,\infty)^n} 1_{B\times(0,\infty)^{n-d}}(Q(u, v)) k_{(w,(u,v))}(x) \nu^n(dw) du dv$$

dla wszystkich $x \in E$ i $B \in \mathcal{B}(E)$. Korzystając z ciągłości możemy znaleźć taką dodatnią stałą c oraz takie zbiory otwarte $U_{x_0} \subset E$, $U_{\bar{u}} \subset (0, \infty)^d$, $U_{\bar{v}} \subset (0, \infty)^{n-d}$ i $U_{\bar{w}} \subset \Theta^n$, że $k_{(w,(u,v))}(x) | \det[\frac{\partial}{\partial(u,v)} Q]|^{-1} \geqslant c$ dla $x \in U_{x_0}$, $u \in U_{\bar{u}}$, $v \in U_{\bar{v}}$, $w \in U_{\bar{w}}$. Przyjmujemy oznaczenie U_z dla wskazania, że punkt z należy do U_z. Ponadto, dla $y_0 = T_{(\bar{w},(\bar{u},\bar{v}))}(x_0)$ możemy znaleźć taki zbiór otwarty $U_{y_0} \subset E$, że $U_{y_0} \times U_{\bar{v}} \subset Q(U_{\bar{u}} \times U_{\bar{v}})$. Zatem dla każdego $x \in U_{x_0}$ i dla każdego zbioru $B \in \mathcal{B}(E)$ mamy

$$\mathcal{K}^n(x, B) \geqslant c \int_{U_{\bar{w}}} \int_{U_{\bar{u}} \times U_{\bar{v}}} 1_{B\times U_{\bar{v}}}(Q(u, v)) \left| \det \left[\frac{\partial Q}{\partial(u, v)} \right] \right| du dv \nu^n(dw).$$

Podstawiając $z_1 = T_{(w,(u,v))}(x)$ oraz $z_2 = v$, uzyskujemy

$$\mathcal{K}^n(x, B) \geqslant c \int_{U_{\bar{w}}} \int_{Q(U_{\bar{u}} \times U_{\bar{v}})} 1_B(z_1) 1_{U_{\bar{v}}}(z_2) dz_1 dz_2 \nu^n(dw).$$

Z doboru zbioru U_{y_0} otrzymujemy

$$\mathcal{K}^n(x, B) \geqslant c \int_{U_{\bar{w}}} \int_{U_{y_0} \times U_{\bar{v}}} 1_B(z_1) 1_{U_{\bar{v}}}(z_2) dz_1 dz_2 \nu^n(dw) = c_0 \int_B 1_{U_{y_0}}(y) m(dy),$$

gdzie $c_0 = c m_{n-d}(U_{\bar{v}}) \nu^n(U_{\bar{w}})$, a $m_{n-d}(U_{\bar{v}})$ jest $n-d$–wymiarową miarą Lebesgue'a zbioru $U_{\bar{v}}$, gdy $d < n$, natomiast w przeciwnym razie $m_{n-d}(U_{\bar{v}}) = 1$. □

Największą trudność w zastosowaniu lematu 4.7 stanowi obliczenie rzędu macierzy $\frac{\partial}{\partial s^n} T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$. Opiszemy teraz dwie możliwości uczynienia tych obliczeń prostszymi.

Uwaga 4.8. Korzystając z ciągłości pochodnych względem $s_1, \ldots, s_n$ i przechodząc do granicy, gdy każda z s_i zmierza do zera z prawej strony, granica pochodnej $\frac{\partial}{\partial s^n} T_{(\theta^n, s^n)}(x_0)$ przyjmuje postać

(4.9)
$$\left[T'_{\theta_n}(y_{n-1}) \ldots T'_{\theta_1}(y_0) g(y_0) \left| T'_{\theta_n}(y_{n-1}) \ldots T'_{\theta_2}(y_1) g(y_1) \right| \cdots \left| T'_{\theta_n}(y_{n-1}) g(y_{n-1}) \right.\right],$$

gdzie $y_0 = x_0$ oraz y_i są zadane indukcyjnie przez $y_i = T_{\theta_i}(y_{i-1})$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Przekształcenia T_θ, $\theta \in \Theta$ oraz odwzorowanie g są określone wprost, więc rząd macierzy postaci (4.9) może zostać uzyskany dużo łatwiej, niż rząd $\frac{\partial}{\partial s^n} T_{(\theta^n, s^n)}(x_0)$. Ponadto, półciągłość rzędu z dołu pozwala nam znaleźć s^n o dodatnich współrzędnych.

Uwaga 4.9. Przypuśćmy, że Θ jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ dla pewnego dodatniego k oraz, że ν jest miarą Lebesgue'a. Załóżmy ponadto, że przekształcenia $(\theta^n, s^n, x) \mapsto T_{(\theta^n, s^n)}(x)$ są różniczkowalne w sposób ciągły. Wówczas, dla danego $x \in E$ możemy rozpatrywać pochodną przekształcenia $(\theta^n, s^n) \mapsto T_{(\theta^n, s^n)}(x)$. Pochodna ta może zostać zapisana jako

$$\frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial(\theta^n, s^n)} = \left[\frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial(\theta_1, s_1)} \left| \frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial(\theta_2, s_2)} \right| \cdots \left| \frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial(\theta_n, s_n)} \right.\right].$$

Lemat 4.7 pozostaje w mocy pod założeniem, że rząd macierzy $\frac{\partial}{\partial(\theta^n, s^n)} T_{(\theta^n, s^n)}(x)$ (zamiast $\frac{\partial}{\partial s^n} T_{(\theta^n, s^n)}(x)$) jest równy d. Podobnie jak w [47], możemy wprowadzić oznaczenie

(4.10)
$$\begin{aligned} \Xi_n &:= \Xi_n(x, (\theta^{n+1}, s^{n+1})) = \left[\frac{\partial T_{(\theta,s)}(y)}{\partial y}\right]_{\substack{y = T_{(\theta^n, s^n)}(x) \\ \theta = \theta_{n+1}, s = s_{n+1}}}, \\ \Psi_n &:= \Psi_n(x, (\theta^{n+1}, s^{n+1})) = \left[\frac{\partial T_{(\theta,s)}(y)}{\partial(\theta, s)}\right]_{\substack{y = T_{(\theta^n, s^n)}(x) \\ \theta = \theta_{n+1}, s = s_{n+1}}}, \end{aligned}$$

gdzie pochodne są obliczane w punkcie $T_{(\theta^n, s^n)}(x)$ i dla $\theta = \theta_{n+1}$, $s = s_{n+1}$. U nas $T_{(\theta^n, s^n)}(x) = x$ dla $n = 0$. Zatem macierz $\frac{\partial}{\partial(\theta^n, s^n)} T_{(\theta^n, s^n)}(x)$ może zostać przepisana w postaci

$$\frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial(\theta^n, s^n)} = [\Xi_{n-1} \cdots \Xi_1 \Psi_0 | \Xi_{n-1} \cdots \Xi_2 \Psi_1 | \cdots | \Xi_{n-1} \Psi_{n-2} | \Psi_{n-1}].$$

Podamy teraz warunki wystarczające, dzięki którym założenia twierdzenia 2.2 będą spełnione dla operatora przejścia K odpowiadającego takiemu jądru $\mathcal{K}$, jak w równaniu (4.7). Dla każdego $x \in E$ definiujemy zbiór

(4.11)
$$\begin{aligned} \mathcal{O}^+(x) = \{T_{(\theta^n, s^n)}(x) : \text{rząd } \frac{\partial T_{(\theta^n, s^n)}(x)}{\partial s^n} &\text{ jest równy } d, \text{ a} \\ k_{(\theta^n, s^n)}(x) > 0 \text{ dla } (\theta^n, s^n) &\in \Theta^n \times (0, \infty)^n,\ n \geqslant 1\}. \end{aligned}$$

Wniosek 4.10. *Przyjmijmy, że $\mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in E$. Załóżmy ponadto, że nie ma zbiorów K-pochłaniających. Zatem, albo operator K jest wymiatającym ze zwartych podzbiorów E, albo K posiada jedyną gęstość niezmienniczą f_*. W tym drugim przypadku, $f_* > 0$ p.w.*

Uwaga 4.11. Zauważmy. że jeżeli istnieje nietrywialny zbiór K-pochłaniający, to istnieje również taki nietrywialny zbiór B, że

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\ \bigcup_{(\theta^n,s^n)\in\Theta^n\times(0,\infty)^n} T_{(\theta^n,s^n)}(B) \subset B.$$

Można to zapisać inaczej jako

$$\bigcup_{x\in B} \mathcal{O}(x) \subset B,$$

gdzie $\mathcal{O}(x) = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{O}_n(x)$ oraz

$$\mathcal{O}_n(x) = \{T_{(\theta^n,s^n)}(x) :\ (\theta^n, s^n) \in \Theta^n \times (0,\infty)^n\}, \quad n \geqslant 1.$$

Gdy wiemy już, że dla operatora K istnieje jedyna i niezmiennicza gęstość, to możemy zastosować twierdzenie 4.6 do udowodnienia asymptotycznej stabilności półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Musimy sprawdzić, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa. Nasz następny wynik podaje na to prosty warunek.

Lemat 4.12. *Niech $x_0 \in E$, $t > 0$ oraz $n \geqslant 1$. Określmy*

$$\Delta_t^n = \{s^n = (s_1,\ldots,s_n) \in (0,\infty)^n : s(n) := s_1 + \ldots + s_n < t\}$$

i przyjmijmy, że istnieje taki ciąg $(\theta^n, s^n) \in \Theta^n \times \Delta_t^n$, że $k_{(\theta^n,s^n)}(x_0) > 0$ i rząd macierzy $\frac{\partial}{\partial s^n}\pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$ jest równy d. Wówczas istnieje taka stała $c_0 > 0$ oraz takie zbiory otwarte U_{x_0}, U_{y_0} zawierające odpowiednio x_0 i $y_0 = \pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$, że dla wszystkich $B \in \mathcal{B}(E)$ oraz $x \in E$ mamy

$$\mathbb{P}_x(X(t) \in B) \geqslant c_0 1_{U_{x_0}}(x) m(B \cap U_{y_0}). \tag{4.12}$$

W szczególności, półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa.

Dowód. Zauważmy, że jeżeli x spełnia równanie $\mathbb{P}_x(t_\infty < \infty) = 0$, to

$$\mathbb{P}_x(X(t) \in B) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X(t) \in B, t_k \leqslant t < t_{k+1}).$$

Zatem, aby sprawdzić czy warunek (4.12) jest spełniony, wystarczy wykazać, że

$$\mathbb{P}_x(\pi_{t-t_n}X(t_n) \in B, t_n \leqslant t < t_{n+1}) \geqslant c_0 1_{U_{x_0}}(x) m(B \cap U_{y_0}). \tag{4.13}$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(\pi_{t-t_n}X(t_n)\in B, t_n \leqslant t < t_{n+1})\\
&= \int_{\Theta^n\times(0,\infty)^n} 1_{\Delta_t^n}(s^n)1_B(\pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x))\psi_{t-s(n)}(T_{(\theta^n,s^n)}(x))k_{(\theta^n,s^n)}(x)\nu^n(d\theta^n)ds^n,
\end{aligned}
$$

gdzie ψ jest dodatnią i ciągłą funkcją określoną wzorem $\psi_t(x) = e^{-\int_0^t \varphi(\pi_r x)dr}$ dla $x \in E$, $t \geqslant 0$. Uzyskujemy więc nierówność (4.13) w sposób analogiczny do przedstawionego w dowodzie lematu 4.7. □

Podobnie jak w uwagach 4.8 i 4.9, możemy uprościć obliczanie rzędu wyrażenia $\frac{\partial}{\partial s^n}\pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$.

Uwaga 4.13. Analogicznie do uwagi 4.8, granica pochodnej $\frac{\partial}{\partial s^n}\pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x_0)$, gdy $s_1,\dots,s_n,t$ zmierzają do zera, jest postaci

$$
\left[T'_{\theta_n}(y_{n-1})\dots T'_{\theta_1}(y_0)g(y_0)-g(y_n)\,|\cdots|\,T'_{\theta_n}(y_{n-1})g(y_{n-1})-g(y_n)\right], \tag{4.14}
$$

gdzie $y_0 = x_0$ oraz $y_i = T_{\theta_i}(y_{i-1})$ dla $i = 1,2,\dots,n$. Podobne podejście do sprawdzenia "warunku rzędu" zostało użyte w [54, wniosku 3.1] oraz [57] jak również w [4] i [10].

W przypadku gdy Θ jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i możemy rozważać pochodną względem $\theta \in \Theta$, mamy

$$
\frac{\partial \pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x)}{\partial(\theta^n,s^n)} = \left[\frac{\partial \pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x)}{\partial(\theta_1,s_1)}\middle|\cdots\middle|\frac{\partial \pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x)}{\partial(\theta_n,s_n)}\right]
$$

dla $x \in E$. Używając oznaczeń jak w definicji (4.10) i określając dodatkowo pochodne

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_n &:= \Upsilon_n(x,(\theta^n,s^n),k) = \left[\frac{\partial \pi_s y}{\partial(\theta_k,s_k)}\right]_{\substack{s=t-s(n)\\ y=T_{(\theta^n,s^n)}(x)}} = \left[0\,|-g(T_{(\theta^n,s^n)}(x))\right],\\
\Upsilon_{x,n} &:= \Upsilon_{x,n}(x,(\theta^n,s^n)) = \left[\frac{\partial \pi_s y}{\partial y}\right]_{\substack{s=t-s(n)\\ y=T_{(\theta^n,s^n)}(x)}},
\end{aligned}
$$

uzyskujemy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi_{t-s(n)}T_{(\theta^n,s^n)}(x)}{\partial(\theta^n,s^n)}\\
&\quad= [\Upsilon_n + \Upsilon_{x,n}\Xi_{n-1}\cdots\Xi_1\Psi_0|\cdots|\Upsilon_n + \Upsilon_{x,n}\Xi_{n-1}\Psi_{n-2}|\Upsilon_n + \Upsilon_{x,n}\Psi_{n-1}].
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

4.3 Układy dynamiczne z losowym przełączaniem

Pokażemy teraz jak za pomocą przygotowanego warsztatu zapisywać takie układy dynamiczne z losowym przełączaniem, jak zostały opisane w [54, 4, 10].

Niech I oznacza zbiór skończony lub przeliczalny. Rozważmy rodzinę lokalnie lipschitzowskich funkcji $g^i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $i \in I$ oraz równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'(t) = g^{i(t)}(x(t)), \\ i'(t) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Załóżmy, że istnieje taki zbiór $M \subset \mathbb{R}^d$, że dla wszystkich $i_0 \in I$ oraz $x_0 \in M$ rozwiązanie $x(t)$ równania $x'(t) = g^{i_0}(x(t))$ z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ istnieje oraz $x(t) \in M$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Oznaczmy to rozwiązanie jako $\pi_t^{i_0}(x_0)$. Wówczas ogólne rozwiązanie układu (4.16) może zostać zapisane w postaci

$$\pi_t(x_0, i_0) = (\pi_t^{i_0}(x_0), i_0), \quad (x_0, i_0) \in M \times I.$$

To daje nam jeden semiukład na $E = M \times I$, który jest generowany przez równanie różniczkowe

$$(x'(t), i'(t)) = g(x(t), i(t)),$$

gdzie funkcja $g\colon \mathbb{R}^d \times I \to \mathbb{R}^{d+1}$ jest postaci

$$g(x, i) = (g^i(x), 0), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ i \in I.$$

Niech m będzie produktem miary Lebesgue'a m_d na przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i miary liczącej ν na $\Theta = I$. Definiujemy przekształcenie $T_j\colon \mathbb{R}^d \times I \to \mathbb{R}^d \times I$, $j \in I$, jako

$$T_j(x, i) = (x, j), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ i, j \in I.$$

Każde z przekształceń jest niesingularne względem m, ponieważ

$$m(T_j^{-1}(B \times \{i\})) = \begin{cases} m_d(B)\nu(\{j\}), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Załóżmy, że $q_j(x, i)$, $j \neq i$ są nieujemnymi funkcjami ciągłymi spełniającymi warunek $\sum_{j \neq i} q_j(x, i) < \infty$ dla wszystkich $i \in I$, $x \in \mathbb{R}^d$. Wówczas możemy określić funkcję intensywności φ jako

$$\varphi(x, i) = \sum_{j \neq i} q_j(x, i)$$

oraz gęstości p_j, $j \in I$, jako $p_i(x, i) = 0$ i

$$p_j(x, i) = \begin{cases} 1, & \varphi(x, i) = 0,\ j \neq i, \\ \frac{q_j(x,i)}{\varphi(x,i)}, & \varphi(x, i) \neq 0,\ j \neq i. \end{cases}$$

Jako szczególny przypadek układu dynamicznego z losowym przełączaniem można rozważyć standardowy proces urodzeń i śmierci przez wzięcie $q_{i+1}(x, i) = b_i$, $q_{i-1}(x, i) = d_i$ i $q_j(x, i) = 0$ dla $j < i-1$ lub $j > i+1$. Wówczas $\varphi(x, i) = b_i + d_i < \infty$.

Na podstawie równań (4.8) możemy zapisać wprost wzory dla gęstości

$$k_{(j,s)}(x,i) = q_j(\pi^i_s x, i)e^{-\int_0^s \varphi(\pi^i_r x,i)dr}$$

oraz dla przekształcenia

$$T_{(j,s)}(x,i) = T_j(\pi^i_s x, i) = (\pi^i_s x, j).$$

Dla każdego n otrzymujemy następującą ogólną postać $T_{(\theta^n,s^n)}(x_0,i_0)$ dla $\theta^n = (i_1,\dots,i_n)$ oraz $s^n = (s_1,\dots,s_n)$:

$$T_{(\theta^n,s^n)}(x_0,i_0) = (\pi^{i_{n-1}}_{s_n} \circ \dots \circ \pi^{i_1}_{s_2} \circ \pi^{i_0}_{s_1} x_0, i_n).$$

Równość tę możemy zapisać jako

$$T_{(\theta^n,s^n)}(x_0,i_0) = (x_n, i_n),$$

gdzie

$$x_n = \pi^{i_{n-1}}_{s_n} \circ \dots \circ \pi^{i_1}_{s_2} \circ \pi^{i_0}_{s_1} x_0 = \pi^{i_{n-1}}_{s_n}(x_{n-1}).$$

Korzystając z tego oznaczenia możemy przeformułować definicję zbioru z równania (4.11) w następujący sposób

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^+(x_0,i_0) = \{(x_n,i_n) \in E :\ &\text{rząd } \frac{\partial x_n}{\partial s^n} \text{ jest równy } d, \text{ a} \\ &q_{i_n}(x_n,i_{n-1})\dots q_{i_1}(x_0,i_1) > 0 \text{ dla } i_1,\dots,i_n \in I,\ s_1,\dots,s_n > 0,\ n \geqslant 1\}.\end{aligned}$$

Dla takiego semiukładu dynamicznego ze skokami możemy zmodyfikować dowód lematu 4.7, aby uzyskać następny wynik dla odpowiadającego temu semiukładowi operatora K.

Wniosek 4.14. *Załóżmy, że $\mathcal{O}^+(x,i) \neq \emptyset$ dla wszystkich $(x,i) \in E = M \times I$. Przyjmijmy ponadto, że nie istnieją zbiory K–pochłaniające. Wówczas albo operator K jest wymiatający ze zwartych podzbiorów E albo K ma jedyną gęstość niezmienniczą f_*. W tym drugim przypadku, $f_* > 0$ p.w. W szczególności, jeżeli zbiór M jest zwarty, to operator K ma jedyną gęstość niezmienniczą.*

Aby sprawdzić, czy rząd $\frac{\partial x_n}{\partial s^n}$ jest równy d, możemy użyć uwagi 4.8 lub nawiasów Liego jak w [4, twierdzenie 3], [10, twierdzenie 4.4]. Warto wspomnieć, że w [10] zakłada się, że zbiór M jest zwarty.

Rozdział 5

Dwuwymiarowy model ekspresji genu z burstingiem

W tym rozdziale przeanalizujemy szczególny przypadek dwuwymiarowego procesu Markowa $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ o wartościach w przestrzeni $E = [0, \infty)^2$. Niech X_1 i X_2 oznaczają odpowiednio liczbę molekuł mRNA i białek. Zakładamy, że cząsteczki białek rozpadają się w tempie γ_2 oraz, że proces translacji protein z mRNA przebiega w tempie β_2. Molekuły mRNA rozpadają się w tempie γ_1, co jest przerywane w losowych momentach

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$$

kiedy nowe cząsteczki mRNA są produkowane z intensywnością φ zależną przynajmniej od obecnego poziomu białek X_2. W każdej chwili t_k produkowana jest losowa liczba θ_k cząsteczek mRNA i dzieje się to w sposób niezależny od wszystkiego innego zgodnie z rozkładem o gęstości h. Zatem $p_\theta(x) = h(\theta)$. Natomiast przekształcenie T_θ jest zadane wzorem

$$T_\theta(x_1, x_2) = (\theta + x_1, x_2), \quad \theta \in (0, \infty).$$

Stąd wnioskujemy, że jądro skoku jest postaci

$$\mathcal{P}((x_1, x_2), B) = \int_0^\infty 1_B(\theta + x_1, x_2)h(\theta)d\theta,$$

a więc operator przejścia P przyjmuje następującą formę

$$Pf(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f(z, x_2)h(x_1 - z)dz.$$

Semiukład dynamiczny jest określony przez rozwiązania układu równań

$$\frac{dx_1}{dt} = -\gamma_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\gamma_2 x_2 + \beta_2 x_1,$$

i może zostać wyrażony następującym wzorem

$$\pi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{-\gamma_1 t}, x_2 e^{-\gamma_2 t} + x_1 \vartheta(t)),$$

gdzie

$$\vartheta(t) = \frac{\beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2}(e^{-\gamma_2 t} - e^{-\gamma_1 t}).$$

Jeżeli $\gamma_1 > \gamma_2$, to mamy $\pi_t(E) \subseteq E$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, a przekształcenie $T_{(\theta,s)}$ przyjmuje postać

$$T_{(\theta,s)}(x_1, x_2) = (\theta + x_1 e^{-\gamma_1 s}, x_2 e^{-\gamma_2 s} + x_1 \vartheta(s)).$$

Założenie $\gamma_1 > \gamma_2$ jest uzasadnione z punktu widzenia biologicznego, patrz na przykład [68] i odwołania tam zamieszczone, gdzie można znaleźć wzmianki o zaobserwowanym u bakterii (E. coli) szybkim procesie rozpadu mRNA. Produkcja cząsteczek mRNA może zostać opisana za pomocą gęstości wykładniczej o średniej b

$$h(\theta) = \frac{1}{b} e^{-\theta/b}, \quad \theta > 0,$$

podczas gdy intensywność φ jest funkcją Hilla zależną wyłącznie od drugiej współrzędnej,

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 x_2^N}{1 + \kappa_3 x_2^N},$$

gdzie $N, \kappa_1 > 0$, a $\kappa_2, \kappa_3 \geqslant 0$ są stałymi. Jeżeli $\kappa_3 = 0$, to dodatkowo zakładamy, że $N \leqslant 1$ oraz $\gamma_2 > b\beta_2\kappa_2/(\gamma_1 - \gamma_2)$. Pokażemy, że minimalna półgrupa $\{P(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.

Biorąc $\Theta = (0, \infty)$ i przyjmując, że ν jest miarą Lebesgue'a na $(0, \infty)$ możemy zapisać jądro stochastyczne $\mathcal{K}$ tak, jak w równaniu (4.7). Za pomocą wniosku 4.10 wykażemy, że operator przejścia K odpowiadający jądru $\mathcal{K}$ ma jedyną gęstość niezmienniczą, która dodatkowo jest ściśle dodatnia p.w.

Najpierw musimy sprawdzić założenia wniosku 4.10. Funkcja $k_{(\theta,s)}(x)$ określona jak w równaniu (4.8) jest ściśle dodatnia dla wszystkich $x \in E$ i $\theta, s > 0$, ponieważ zarówno φ jak h są ściśle dodatnie. Uwzględniając uwagę 4.9, rozpatrujemy pochodną $\frac{\partial}{\partial(\theta^n,s^n)} T_{(\theta^n,s^n)}(x)$ zamiast $\frac{\partial}{\partial s^n} T_{(\theta^n,s^n)}(x)$. Mamy

$$\Xi_k = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 s_{k+1}}, & 0 \\ \vartheta(s_{k+1}), & e^{-\gamma_2 s_{k+1}} \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} 1, & g(\pi_{s_{k+1}} T_{(\theta^k,s^k)}(x)) \\ 0, & \end{bmatrix},$$

gdzie

$$g(x) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 x_1 \\ -\gamma_2 x_2 + \beta_2 x_1 \end{pmatrix} \quad \text{dla } x = (x_1, x_2).$$

Dla dowolnych $\theta_1, s_1 > 0$ możemy obliczyć

$$\frac{\partial T_{(\theta^1,s^1)}(x)}{\partial(\theta^1, s^1)} = [\Psi_0] = \begin{bmatrix} 1, & -\gamma_1 x_1 e^{-\gamma_1 s_1} \\ 0, & -\gamma_2 x_2 e^{-\gamma_2 s_1} + x_1 \frac{\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2}(\gamma_1 e^{-\gamma_1 s_1} - \gamma_2 e^{-\gamma_2 s_1}) \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy $\frac{\partial}{\partial(\theta^1,s^1)} T_{(\theta^1,s^1)}(x)$ jest równy 2 wtedy i tylko wtedy, gdy

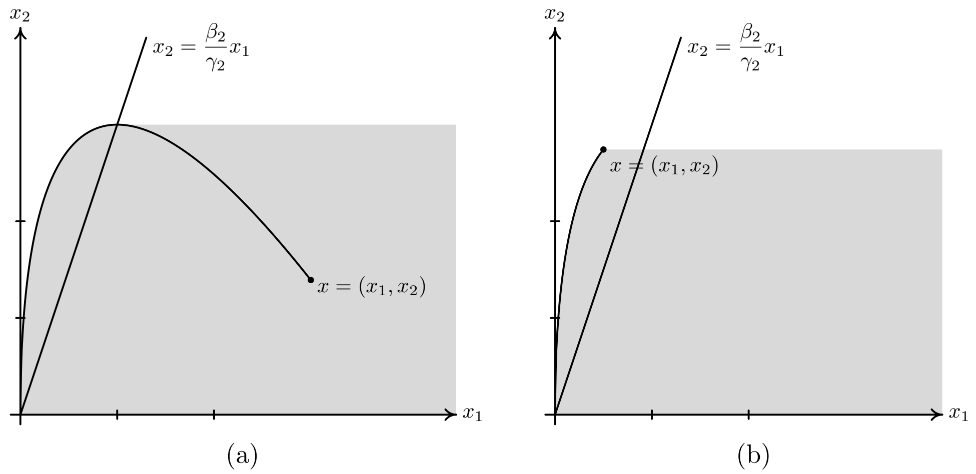
$$-\gamma_2 x_2 e^{-\gamma_2 s_1} + x_1 \frac{\beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2}(\gamma_1 e^{-\gamma_1 s_1} - \gamma_2 e^{-\gamma_2 s_1}) \neq 0.$$

Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony, to musimy rozważyć $T_{(\theta_2,s_2)}(T_{(\theta_1,s_1)}(x))$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{(\theta^2,s^2)}(x)}{\partial(\theta^2,s^2)} &= [\Xi_1\Psi_0|\Psi_1] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} e^{-\gamma_1 s_2}, & e^{-\gamma_1 s_2} g_1(\pi_{s_1}x) & 1, & g_1(\pi_{s_2}T_{(\theta^1,s^1)}(x)) \\ \vartheta(s_2), & \vartheta(s_2)g_1(\pi_{s_1}x) + e^{-\gamma_2 s_2} g_2(\pi_{s_1}x) & 0, & g_1(\pi_{s_2}T_{(\theta^1,s^1)}(x)) \end{array}\right]\end{aligned}$$

i patrząc na pierwszą i trzecią kolumnę widzimy, że rząd $\frac{\partial}{\partial(\theta^2,s^2)}T_{(\theta^2,s^2)}(x)$ wynosi 2. Wynika stąd, że $\mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in E$.

Teraz udowodnimy, że nie istnieją zbiory K-pochłaniające. Uwzględniając uwagę 4.11 wystarczy wykazać, że $(0,\infty)^2 \subset \mathcal{O}(x)$ dla m-p.w. $x \in E$. Załóżmy najpierw, że punkt $x = (x_1,x_2)$ jest taki, że $x_2 < \beta_2 x_1/\gamma_2$. Wówczas jego trajektoria ma kształt przedstawiony na rysunku 5.1(a). Szary obszar pokrywa zbiór $\mathcal{O}_1(x)$ i widzimy, że kolejne iteracje dają resztę. Przyjmijmy teraz, że $x_2 > \beta_2 x_1/\gamma_2$. Wtedy zbiór $\mathcal{O}_1(x)$ jest taki, jak został przedstawiony na rysunku 5.1(b).



Rysunek 5.1: Graficzne przedstawienie zbioru $\mathcal{O}_1(x)$

Wniosek 4.10 implikuje, że albo operator K jest wymiatający ze zbiorów zwartych albo K ma jedyną gęstość niezmienniczą f_*. Aby wykluczyć wymiatanie, zastosujemy do operatora K wniosek 2.3 biorąc

$$V(x) = V(x_1,x_2) = x_1\frac{\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2} + x_2.$$

Otrzymujemy

$$V(X(t_1)) - V(X(0)) = \frac{\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2}\theta_1 - V(X(0))(1-e^{-\gamma_2 t_1}).$$

Uwzględniając fakt, że t_1 ma dystrybuantę jak w równaniu (1.4), uzyskujemy

$$\mathbb{E}_x(1-e^{-\gamma_2 t_1}) = \gamma_2\int_0^\infty e^{-\gamma_2 t} e^{-\int_0^t \varphi(\pi_s(x))ds}dt.$$

Zatem mamy

$$(5.1)\qquad \int_E V(y)\mathcal{K}(x,dy) - V(x) = \mathbb{E}_x(V(X(t_1)) - V(X(0))) = \int_0^\infty W(t,x)e^{-\int_0^t \varphi(\pi_s(x))ds}dt,$$

gdzie

$$W(t,x) = \frac{b\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2}\varphi(\pi_t x) - V(x)\gamma_2 e^{-\gamma_2 t}.$$

Zauważmy, że funkcja W jest ograniczona z góry przez stałą, a $W(t,x)$ zmierza do $-\infty$ gdy $\|x\| \to \infty$ dla każdego t. Funkcja φ ma dodatnie ograniczenie dolne $\underline{\varphi}$, więc otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \varphi(\pi_s(x))ds}dt \leqslant \frac{1}{\underline{\varphi}} \quad \text{dla wszystkich } x \in E.$$

Z lematu Fatou wynika, że

$$(5.2)\qquad \limsup_{\|x\|\to\infty} \int_0^\infty W(t,x)e^{-\int_0^t \varphi(\pi_s(x))ds}dt < 0.$$

Funkcja w równaniu (5.1) jest ciągła, a zatem ograniczona na zbiorach zwartych. W związku z tym zależność (5.2) implikuje, że warunek (2.4) jest spełniony. Kończy to dowód istnienia jedynej gęstości niezmienniczej dla operatora K.

Teraz przyjrzymy się procesowi $X = \{X(t)\}_{t\geqslant 0}$. Macierze Υ_n oraz $\Upsilon_{x,n}$ z uwagi 4.13 są postaci

$$\Upsilon_n = \begin{bmatrix} 0, & -g(T_{(\theta^n,s^n)}(x)) \\ 0, & \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_{x,n} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1(t-s(n))}, & 0 \\ \vartheta(t-s(n)), & e^{-\gamma_2(t-s(n))} \end{bmatrix}.$$

Zatem $\frac{\partial}{\partial(\theta^2,s^2)}\pi_{t-s(2)}T_{(\theta^2,s^2)}(x)$ możemy przedstawić następująco

$$\frac{\partial \pi_{t-s(2)}T_{(\theta^2,s^2)}(x)}{\partial(\theta^2,s^2)} = [\Upsilon_2 + \Upsilon_{x,2}\Xi_1\Psi_0 | \Upsilon_2 + \Upsilon_{x,2}\Psi_1] = \left[\begin{array}{cc|cc} e^{-\gamma_1(t-s_1)}, & * & e^{-\gamma_1(t-s(2))}, & * \\ e^{-\gamma_1 s_2}\vartheta(t-s(2)) + e^{-\gamma_2(t-s(2))}\vartheta(s_2), & * & \vartheta(t-s(2)), & * \end{array}\right],$$

gdzie pierwsza i trzecia kolumna są liniowo zależne, a pozostałe kolumny są dla obliczeń nieistotne. Warto w tym momencie zwrócić uwagę na to, że zamiast macierzy (4.14), której wszystkie kolumny są parami liniowo zależne, musieliśmy zastosować zależność (4.15). Z lematu 4.12 uzyskujemy fakt, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ odpowiadająca procesowi X jest częściowo całkowa. Z twierdzenia 4.6 wynika więc, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.

Rozdział 6

Proces fragmentacji

6.1 Proces fragmentacji jako skokowy proces Markowa

Fragmentacja to zjawisko rozpadania się cząstek w całe spektrum mniejszych cząsteczek charakterystyczne dla wielu procesów przebiegających naturalnie począwszy od degradacji polimerów [71] w chemii do biologicznego rozpadu agregatów [1]. Stochastyczny model fragmentacji został po raz pierwszy zaprezentowany w [29] i od tego czasu był intensywnie badany za pomocą różnych metod probabilistycznych (patrz [11, 34, 65, 66] wraz z referencjami). Istnieje również podejście z wykorzystaniem metod deterministycznych, za pomocą równań transportu oraz metod z zakresu analizy funkcjonalnej ([46, 45, 8, 3, 27, 7, 50]), które wykorzystamy tutaj.

Oznaczmy symbolem $c(t,x)$ liczbowe zagęszczenie cząsteczek o masie (rozmiarze) $x > 0$ w chwili $t > 0$. Równanie

$$\frac{\partial c(t,x)}{\partial t} = \int_x^\infty b(x,y)a(y)c(t,y)dy - a(x)c(t,x), \quad t, x > 0, \tag{6.1}$$

z warunkiem początkowym

$$c(0,x) = c_0(x), \quad x > 0, \tag{6.2}$$

opisuje ewolucję tego zagęszczenia. W równaniu tym, niech $a(x)$ będzie tempem rozpadu cząsteczek o masie x, a $b(x,y)$ niech oznacza tempo powstawania cząsteczek o masie x z tych o masie y. Zarówno a, jak i b są nieujemnymi funkcjami borelowskimi. Aby całkowita masa została zachowana, funkcja b powinna spełniać warunek

$$\int_0^y b(x,y)x dx = y \quad \text{i} \quad b(x,y) = 0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant y.$$

Rozważamy przypadek, gdy $a(x) = x^\alpha$, natomiast b jest *jednorodna*, tzn. istnieje taka funkcja borelowska $h\colon (0,1) \to \mathbb{R}_+$, że

$$b(x,y) = \frac{1}{y} h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{dla} \quad 0 < x < y \quad \text{i} \quad \int_0^1 h(r) r dr = 1. \tag{6.3}$$

Niech teraz E oznacza przedział otwarty $(0,\infty)$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(0,\infty)$ niech będzie σ-ciałem podzbiorów borelowskich $(0,\infty)$, a $L^1 = L^1(E,\mathcal{E},m)$ niech będzie przestrzenią funkcji całkowalnych względem miary $m(dx) = x\,dx$ z normą

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(x)|xdx.$$

Jeżeli $a(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha \geqslant 0$, to całkowita masa jest zachowana [45, 5]. Zatem, jeśli

$$c_0 \in D(m) := \{f \in L^1 \colon f \geqslant 0, \|f\| = 1\},$$

to $c(t,\cdot) \in D(m)$ dla wszystkich $t > 0$. Jeśli natomiast $\alpha < 0$, to rozwiązania gubią masę zgodnie z tzw. zjawiskiem "rozpadania się"[44, 33, 6, 9].

Niech ε_n, θ_n, $n \in \mathbb{N}$, będą ciągami niezależnych zmiennych losowych, gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna ε_n ma rozkład wykładniczy o średniej 1, natomiast θ_n mają ten sam rozkład zadany dystrybuantą H określoną na przedziale $(0,1)$ następująco

$$H(r) = \Pr(\theta_1 \leqslant r) = \int_0^r h(z)zdz, \quad r \in (0,1). \tag{6.4}$$

Jeśli Y_0 jest dodatnią zmienną losową niezależną od θ_n, $n \in \mathbb{N}$, to ciąg

$$Y_n = \theta_n Y_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

określa dyskretny w czasie proces Markowa ze stochastycznym jądrem przejścia

$$\mathcal{P}(x,B) = \int_0^1 1_B(zx)h(z)zdz, \quad x > 0, B \in \mathcal{B}(0,\infty). \tag{6.5}$$

Pokażemy, że operator przejścia P na L^1 odpowiadający $\mathcal{P}$ jest określony następująco

$$Pf(x) = \int_x^\infty \frac{1}{y} h\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy, \quad x > 0. \tag{6.6}$$

W naszym przypadku zastosujemy wzór (2.2) dla przestrzeni $(0,1)$ z miarą Lebesgue'a ν i do funkcji $p_z, T_z \colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ zadanych następująco $p_z(x) = h(z)z$, $T_z(x) = zx$. Operator Frobeniusa-Perrona $\hat{T}_z$ jest postaci $\hat{T}_z f(x) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{x}{z}\right)$, $z \in (0,1)$, $x > 0$, a zatem

$$Pf(x) = \int_0^1 \frac{1}{z^2} p_z\left(\frac{x}{z}\right) f\left(\frac{x}{z}\right)\,dz = \int_0^1 \frac{1}{z} h(z) f\left(\frac{x}{z}\right)\,dz$$

Zmieniając zmienne otrzymujemy

$$Pf(x) = \int_x^\infty \frac{1}{y} h\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy.$$

Załóżmy najpierw, że $\alpha \geqslant 0$. Definiujmy trajektorię procesu $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ o początku w punkcie $Y(0) = Y_0 = x$:

$$Y(t) = Y_n, \quad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, n \geqslant 0, \tag{6.7}$$

gdzie τ_n są chwilami skoków

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n := \sigma_n + \tau_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

a σ_n są momentami zatrzymania określonymi następująco

$$\sigma_n := \frac{\varepsilon_n}{a(Y_{n-1})} = \frac{\varepsilon_n}{Y_{n-1}^{\alpha}}, \quad n \geqslant 1.$$

Proces $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest minimalnym KDPM na $(0,\infty)$ o charakterystykach $(\pi, a, \mathcal{P})$, gdzie $\pi_t x = x$ dla $t, x > 0$, $a(x) = x^{\alpha}$, a $\mathcal{P}$ jest jak w (6.5). Zauważmy, że (patrz na przykład [62, rozdział 6.1]) jeżeli gęstość $Y(0)$ spełnia równanie

$$\Pr(Y(0) \in B) = \int_B c_0(x) x\, dx \tag{6.8}$$

gdzie $c_0 \in D(m)$, to

$$\Pr(Y(t) \in B) = \int_B c(t,x) x\, dx \quad \text{dla wszystkich } t > 0, B \in \mathcal{B}(0,\infty), \tag{6.9}$$

gdzie c jest rozwiązaniem równania (6.1) z warunkiem początkowym c_0.

Zanim pokażemy jak można określić proces fragmentacji dla $\alpha < 0$ udowodnimy pomocniczy lemat, z którego skorzystamy również w następnym rozdziale. Równość według rozkładu będziemy oznaczać symbolem $\stackrel{d}{=}$.

Lemat 6.1. *Niech ε_n, θ_n, $n \in \mathbb{N}$, będą ciągami niezależnych zmiennych losowych, gdzie ε_n mają rozkład wykładniczy o średniej 1, a θ_n mają identyczne rozkłady z dystrybuantą H zadaną wzorem (6.4). Załóżmy, że $\alpha > 0$. Wówczas zmienna losowa Z_∞ określona następująco*

$$Z_\infty = \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} \theta_j^{\alpha} \tag{6.10}$$

jest skończona p.w. oraz spełnia warunek

$$Z_\infty \stackrel{d}{=} \theta_0^{\alpha} Z_\infty + \varepsilon_0,$$

z niezależnymi Z_∞, θ_0, ε_0, gdzie $\theta_0, \varepsilon_0, Z_\infty$ są niezależne oraz $\theta_0 \stackrel{d}{=} \theta_1$, $\varepsilon_0 \stackrel{d}{=} \varepsilon_1$. Ponadto rozkład zmiennej Z_∞ jest jedynym rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego równością

$$Z_n = \theta_n^{\alpha} Z_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geqslant 1.$$

Dowód. Zauważmy, że po prawej stronie równania (6.10) bierzemy iloczyn, który dla $k = 1$ jest równy 1. Jako, że zmienne losowe θ_j, ε_j są nieujemne, więc Z_∞ jest dobrze zdefiniowaną zmienną losową o wartościach w $[0, \infty]$; co więcej, jest skończona p.n. (patrz [32, twierdzenie 2.1] dla naszego wyboru θ_j, ε_j). Jako, że $-\infty \leqslant \mathbb{E}(\log \theta_1) < 0$ oraz $\mathbb{E}(\log(\max\{\varepsilon_1, 1\}) < \infty$, więc szereg w równaniu (6.10) jest zbieżny p.n. na mocy [63, twierdzenia 1.6] oraz

$$Z_\infty \stackrel{d}{=} \theta_0^\alpha Z_\infty + \varepsilon_0,$$

gdzie $\theta_0, \varepsilon_0, Z_\infty$ są niezależne oraz $\theta_0 \stackrel{d}{=} \theta_1$, $\varepsilon_0 \stackrel{d}{=} \varepsilon_1$. Łańcuch Markowa $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ ma na mocy [63, twierdzenia 1.5] jedyny rozkład stacjonarny, który jest rozkładem zmiennej Z_∞. □

Zakończymy ten rozdział konstrukcją skokowego procesu Markowa $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ związanego z równaniem fragmentacji (6.1) z $a(x) = x^\alpha$ oraz $\alpha < 0$. Trajektoria procesu $Y(t)$ o początku w $Y(0) = Y_0$ jest określona warunkiem (6.7) tak długo, jak $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ dla pewnego n. Jako, że

$$Y_0^\alpha \tau_n = Y_0^\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{Y_{k-1}^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} \theta_j^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1$$

oraz $-\alpha > 0$, więc widzimy, podobnie jak w dowodzie lematu 6.1, że granica

$$\lim_{n\to\infty} Y_0^\alpha \tau_n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} \theta_j^{|\alpha|} =: I_\infty$$

istnieje i jest skończona p.n. Zatem czas wybuchu procesu określony jako $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, jest skończony p.n. Ciąg Y_n, $n \geqslant 0$ jest nierosnący i zbieżny do 0 p.n. Możemy zatem przyjąć, że $Y(t) = 0$ dla $t \geqslant \tau_\infty$ oraz $Y_0^{-\alpha} I_\infty$ jest pierwszą chwilą w której $Y(t)$ osiąga 0. W przypadku, gdy $\alpha > 0$ mamy $I_\infty = Z_\infty$.

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Proces $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ można również przedstawić następująco. Niech $\{Z(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie złożonym procesem Poissona postaci

$$Z(t) = -\sum_{j=1}^{N(t)} \log \theta_j, \quad t > 0, \tag{6.11}$$

gdzie $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest procesem Poissona z chwilami skoków $\tilde{\tau}_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$, $n \geqslant 1$. Wówczas $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ może zostać przedstawiony w postaci [18, 34]

$$Y(t) = Y_0 e^{-Z(\rho(Y_0^{-|\alpha|} t))}, \quad t \geqslant 0,$$

gdzie ρ jest zmianą czasu określoną wzorem

$$\rho(t) = \inf\{r \geqslant 0 : \int_0^r e^{-|\alpha| Z(s)} ds > t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Zauważmy, że

$$\int_0^{\rho(t)} e^{-|\alpha|Z(s)}ds = t$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $t < I_\infty$ lub $\rho(t) = +\infty$ w przeciwnym przypadku. Zmienna losowa I_∞ jest przykładem tak zwanego funkcjonału wykładniczego (patrz np. [18])

$$I_\infty = \int_0^\infty e^{-|\alpha|Z(s)}ds.$$

Łatwo to zobaczyć, jeśli zauważymy, że $N(s) = k$ dla $t \in [\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1})$, gdzie $\tilde{\tau}_0 := 0$, $\varepsilon_{k+1} = \tilde{\tau}_{k+1} - \tilde{\tau}_k$, $k \geqslant 0$ oraz

$$\int_0^\infty e^{-|\alpha|Z(s)}ds = \sum_{k\geqslant 0}\int_{\tilde{\tau}_k}^{\tilde{\tau}_{k+1}} \prod_{j=1}^k \theta_j^{|\alpha|}ds = \tilde{\tau}_1 + \sum_{k\geqslant 1}(\tilde{\tau}_{k+1} - \tilde{\tau}_k)\prod_{j=1}^k \theta_j^{|\alpha|} = I_\infty.$$

6.2 Istnienie rozwiązań samopodobnych dla procesu fragmentacji

Dla $\alpha > 0$ możemy przedstawić [49, 27] rozwiązanie c równania fragmentacji (6.1) jako

$$c(t,x) = \gamma(t)^2 u(\log\gamma(t), \gamma(t)x), \quad x, t > 0, \quad \text{gdzie } \gamma(t) = (1+t)^{1/\alpha},$$

a u jest rozwiązaniem następującego równania całkowo-różniczkowego

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 u(t,x)) - \varphi(x)u(t,x) + P(\varphi u(t,\cdot))(x). \tag{6.12}$$

Tutaj funkcja φ jest zdefiniowana w następujący sposób

$$\varphi(x) = \alpha x^\alpha, \quad x > 0.$$

a operator liniowy P na przestrzeni L^1 jest jak w (6.6). W szczególności, jeżeli u_* jest rozwiązaniem stacjonarnym równania (6.12), to

$$c_*(t,x) = \gamma(t)^2 u_*(\gamma(t)x), \quad t \geqslant 0, x > 0, \quad \gamma(t) = (1+t)^{1/\alpha} \tag{6.13}$$

nazywane jest *rozwiązaniem samopodobnym* równania (6.1).

Nasz główny wynik w tym rozdziale jest następujący.

Twierdzenie 6.2. *Niech $a(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha > 0$ i niech b spełnia równanie* (6.3) *Wówczas istnieje samopodobne rozwiązanie c_* wyrażające się zależnością* (6.13)*, gdzie $c_*(t,\cdot) \in D(m)$, $t \geqslant 0$. Ponadto każde rozwiązanie c równania* (6.1) *z warunkiem początkowym $c_0 \in D(m)$ spełnia warunek*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty |c(t,x) - c_*(t,x)|x\,dx = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^1 \log z\, h(z) z dz > -\infty. \tag{6.14}$$

Szczególne rozwiązania samopodobne zostały uzyskane różnymi metodami w [52, 70]. W celu zgłębienia tematyki probabilistycznego podejścia do samopodobnej fragmentacji, odsyłamy czytelnika do [11] wraz z referencjami. W literaturze matematycznej rozwiązania samopodobne oraz asymptotyka równania fragmentacji były rozpatrywane za pomocą metod analitycznych (patrz [27]), gdzie istnienie samopodobnego rozwiązania zostaje wykazane pod założeniem, że

$$\int_0^1 z^k h(z)dz < \infty$$

dla pewnego $k < 1$, natomiast zbieżność jest wykazana dla $k \leqslant \alpha$ i przy zachowaniu dodatkowych warunków regularnościowych. Dowód naszego wyniku jest oparty o reprezentację rozwiązań równania (6.1) za pomocą gęstości procesu Markowa $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$. Skonstruujemy taki proces Markowa $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$, że spełnione jest równanie

$$Y(t) = (1+t)^{-1/\alpha} X(\log(1+t)^{1/\alpha}) \quad \text{dla wszystkich } t \geqslant 0, \tag{6.15}$$

gdzie $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest procesem zadanym przez (6.7). Ten kawałkami deterministyczny proces Markowa ma dobre własności asymptotyczne, co pokażemy w sekcji 6.3 używając twierdzenia 4.6.

Właściwości asymptotyczne równań typu fragmentacji wzrostu były badane i ulepszane w wielu pracach (niedawne wyniki np. w [50] i [13]). Jednak żaden z tych wyników nie pozwala nam podać warunku koniecznego i wystarczającego (6.14). Przypadek w którym $\alpha = 0$ jest rozpatrywany w [25] oraz [13]. Gdy $\alpha > 0$, to wiadomo ([12]), że proces $\{1/Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest przykładem tak zwanego samopodobnego procesu Markowa o rosnących trajektoriach i na podstawie [12, twierdzenia 1] wiadomo, że $t^{1/\alpha}Y(t)$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej Y_∞, która jest niezdegenerowana gdy spełniony jest warunek (6.14). Nasze metody pozwalają uzyskać zbieżność gęstości $(1+t)^{1/\alpha}Y(t)$, skąd wynika zbieżność według rozkładu i pozwalają zidentyfikować rozkład zmiennej Y_∞ jako rozkład stacjonarny procesu $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ absolutnie ciągły względem m i z gęstością u_*. Jeżeli warunek (6.14) nie jest spełniony, to wówczas Y_∞ jest równa 0. Pod koniec sekcji 6.4 opisujemy jak w naszymi metodami uzyskać tego typu granice. Dalsze badania asymptotyki w tym przypadku są przedstawione w [17]. Samopodobne procesy Markowa były również używane w [34] celem badania zachowania rozwiązań równania fragmentacji dla dużych czasów, gdy $\alpha < 0$.

6.3 Dowód twierdzenia 6.2

Trajektoria procesu $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ o początku w punkcie $X(0) = X_0 = x$ może być określona jako

$$X(t) = e^{t-t_n} X_n, \quad t_n \leqslant t < t_{n+1}, n \geqslant 0,$$

gdzie t_n są chwilami skoków

$$t_0 := 0, \quad t_n = \log\left(\frac{\varepsilon_n}{X_{n-1}^\alpha} + 1\right)^{1/\alpha} + t_{n-1}, \tag{6.16}$$

a $X_n = X(t_n)$ są pozycjami "po skokach"

$$X_n = \theta_n\left(\varepsilon_n + X_{n-1}^\alpha\right)^{1/\alpha}, \quad n \geqslant 1. \tag{6.17}$$

Zapiszemy teraz proces $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ stosując oznaczenia z rozdziału 1 i określimy półgrupę minimalną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ odpowiadającą temu procesowi zdefiniowaną w rozdziale 4. Pozwoli nam to udowodnić twierdzenie 6.2 wykorzystując asymptotyczną stabilność półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, którą wykażemy za pomocą twierdzenia 4.6.

Proces $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$, przedstawiający fragmentację ze wzrostem jest minimalnym, kawałkami deterministycznym procesem Markowa [62, rozdział 6.2] o charakterystykach $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$, gdzie

$$\varphi(x) = \alpha x^\alpha \quad \text{i} \quad \pi_t x = e^t x, \quad x > 0, t \geqslant 0.$$

Jest to szczególny przypadek semiukładu dynamicznego ze skokami, gdzie skoki są określone przez odwzorowania $T_\theta(x) = \theta x$, a gęstości przez $p_\theta(x) = h(\theta)\theta$ dla $x \in E = (0, \infty)$, $\theta \in \Theta = (0, 1)$. Zauważmy, że dla $\alpha < 0$ mamy

$$Y(t) = (1+t)^{-1/\alpha} X(\log(1+t)^{-1/\alpha}), \quad t \geqslant 0,$$

gdzie odpowiadający kawałkami deterministyczny proces Markowa $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma charakterystyki $(\pi, \varphi, \mathcal{P})$ z

$$\varphi(x) = |\alpha| x^\alpha, \quad \pi_t x = e^{-t} x, \quad x > 0, t \geqslant 0$$

oraz równanie ewolucyjne jak w [62, rozdziale 6.3] lub w [1, rozdziale 4].

Teraz, gdy $X(0) = Y(0)$ oraz $Y(0)$ spełnia (6.8), to

$$\Pr(X(t) \in B) = \int_B P(t)c_0(x)x dx \quad \text{dla wszystkich } t > 0, B \in \mathcal{B}(0, \infty),$$

gdzie $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą stochastyczną na L^1 oraz $u(t,x) = P(t)c_0(x)$ jest rozwiązaniem równania (6.12) z warunkiem początkowym $u(0,x) = c_0(x)$, patrz [62, rozdział 6.2]. Stąd oraz z (6.15) wynika, że rozwiązanie c równania (6.1) z warunkiem początkowym c_0 może zostać przedstawione jako

$$c(t,x) = \gamma(t)^2 P(\log\gamma(t))c_0(\gamma(t)x), \quad t > 0, x > 0, \text{ gdzie } \gamma(t) = (1+t)^{1/\alpha}. \tag{6.18}$$

Zatem jeżeli półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna z gęstością niezmienniczą u_*, to

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty |c(t,x) - \gamma(t)^2 u_*(\gamma(t)x)| x\, dx = \lim_{t\to\infty} \|P(\log\gamma(t))c_0 - u_*\| = 0.$$

W konsekwencji dowód twierdzenia 6.2 sprowadza się do zbadania asymptotycznej stabilności półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Najpierw pokażemy, że są spełnione wszystkie założenia twierdzenia 4.6. Następnie, w lemacie 6.6 udowodnimy, że warunki (4.3) i (6.14) są równoważne.

Lemat 6.3. *Dla każdego $t > 0$ operator $P(t)$ jest preharrisowski. W szczególności, półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa.*

Dowód. Jako, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest stochastyczna, więc z punktu (3) twierdzenia 4.1 otrzymujemy $m(y : \mathbb{P}_y(t_\infty < \infty) > 0) = 0$, gdzie $t_\infty = \lim_{n\to\infty} t_n$. Zauważmy, że jeżeli y jest takie, że $\mathbb{P}_y(t_\infty < \infty) = 0$, to

$$\mathbb{P}_y(X(t) \in B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y(X(t) \in B, t_n \leqslant t < t_{n+1})$$

oraz $X(t) = e^{t-t_n} X(t_n)$ dla $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n \geqslant 0$. Dla $n = 1$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(e^{t-t_1} X(t_1) \in B, t_1 \leqslant t < t_2)& \\ = \int_0^1 \int_0^t 1_B(e^t\theta y)\psi_{t-s}(\theta e^s y)h(\theta)\theta\varphi(e^s y)\psi_s(y)\,ds d\theta,&\end{aligned}$$

gdzie $\psi_t(y) = e^{-\int_0^t \varphi(e^r y)dr}$. Zmiana zmiennych $x = e^t\theta y$ prowadzi do

$$\mathbb{P}_y(e^{t-t_1} X(t_1) \in B, t_1 \leqslant t < t_2) = \int_B p(x,y)x\,dx,$$

gdzie

$$p(x,y) = 1_{(0,e^t y)}(x) h\left(\frac{x}{e^t y}\right) \frac{1}{(e^t y)^2} \int_0^t \psi_{t-s}(e^{s-t}x)\varphi(e^s y)\psi_s(y)\,ds$$

dla $x, y > 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\int_B P(t)f(x)m(dx) &= \int_0^\infty \mathbb{P}_y(X(t) \in B) f(y)m(dy) \\ &\geqslant \int_0^\infty \int_B p(x,y)m(dx)f(y)m(dy)\end{aligned}$$

dla każdej $f \in D(m)$ i wszystkich zbiorów borelowskich B. Stąd natomiast wynika, że

$$P(t)f(x) \geqslant \int_0^\infty p(x,y)f(y)m(dy), \quad f \in D(m).$$

Zauważmy teraz, że

$$\int_0^\infty p(x,y)m(dy) > 0 \quad \text{dla } m\text{-p.w. } x \in (0,\infty),$$

co kończy dowód. □

Wykorzystywać będziemy następujący lemat.

Lemat 6.4. *Załóżmy, że ξ i θ są niezależnymi zmiennymi losowymi, gdzie ξ ma gęstość f_ξ na $(0,\infty)$ podczas, gdy θ ma gęstość f_θ na $(0,1)$. Wówczas gęstość $f_{\xi\theta}$ zmiennej losowej $\xi\theta$ jest zadana wzorem*

$$f_{\xi\theta}(x) = \int_x^\infty f_\theta\left(\frac{x}{r}\right)\frac{1}{r}f_\xi(r)dr, \quad x > 0.$$

i jest dodatnia p.w., gdy f_ξ jest dodatnia p.w.

Dowód. Dystrybuanta $F_{\xi\theta}$ zmiennej losowej $\xi\theta$ może zostać zapisana następująco

$$F_{\xi\theta}(x) = \Pr(\xi\theta \leqslant x) = \Pr\left(\theta \leqslant \frac{x}{\xi}\right) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{x}{r}} f_\theta(y)f_\xi(r)dydr, \quad x > 0.$$

Jako, że f_θ znika na zewnątrz $(0,1)$, więc weźmy $r \geqslant x$. Otrzymujemy

$$F_{\xi\theta}(x) = \int_x^\infty \int_0^{\frac{x}{r}} f_\theta(y)f_\xi(r)dydr, \quad x > 0.$$

Zmieniając zmienne oraz kolejność całkowania uzyskujemy

$$F_{\xi\theta}(x) = \int_0^x \int_x^\infty f_\theta\left(\frac{y}{r}\right)\frac{1}{r}f_\xi(r)drdy, \quad x > 0.$$

Zatem gęstość $f_{\xi\theta}$ jest postaci

$$f_{\xi\theta}(x) = \int_x^\infty f_\theta\left(\frac{x}{r}\right)\frac{1}{r}f_\xi(r)dr, \quad x > 0.$$

Przypuśćmy teraz, że $f_{\xi\theta}(x) = 0$. Wówczas $f_\theta\left(\frac{x}{r}\right)\frac{1}{r}f_\xi(r) = 0$ dla p.w. $r \geqslant x > 0$, skąd wynika, że $f_\theta\left(\frac{x}{r}\right) = 0$ dla p.w. $r \geqslant x > 0$. To natomiast prowadzi do sprzeczności z faktem iż f_θ jest gęstością na $(0,1)$. $\square$

Lemat 6.5. *Niech ε_n, θ_n, $n \in \mathbb{N}$, będą ciągami niezależnych zmiennych losowych, gdzie ε_n mają rozkład wykładniczy o średniej 1, a θ_n mają identyczne rozkłady z dystrybuantą H zadaną wzorem (6.4). Wówczas zmienna losowa*

$$X_\infty = \left(\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon_k \prod_{j=1}^{k} \theta_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \tag{6.19}$$

jest skończona p.w. oraz spełnia warunek

$$X_\infty \overset{d}{=} \theta_0(\varepsilon_0 + X_\infty^\alpha)^{1/\alpha} \tag{6.20}$$

z niezależnymi X_∞, θ_0, ε_0, gdzie $\theta_0 \overset{d}{=} \theta_1$ i $\varepsilon_0 \overset{d}{=} \varepsilon_1$. Ponadto

$$\mathbb{E}X_\infty^\alpha = \frac{\mathbb{E}\theta_0^\alpha}{1 - \mathbb{E}\theta_0^\alpha}, \tag{6.21}$$

a rozkład μ_* zmiennej X_∞ jest absolutnie ciągły względem m z ściśle dodatnią gęstością f_*. Jest on jedynym rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego równością (6.17).

Dowód. Z równości (6.17) wynika, że

$$X_n^\alpha = \varepsilon_n \theta_n^\alpha + X_{n-1}^\alpha \theta_n^\alpha, \quad n \geqslant 1.$$

Poprzez iterowanie tego równania otrzymujemy

$$X_n^\alpha = \varepsilon_n \theta_n^\alpha + \varepsilon_{n-1}\theta_{n-1}^\alpha \theta_n^\alpha + \ldots + \varepsilon_1 \prod_{j=1}^n \theta_j^\alpha + X_0^\alpha \prod_{j=1}^n \theta_j^\alpha.$$

Jako, że $\theta_j^\alpha \in [0,1]$, $j \geqslant 1$, więc widzimy, że ciąg $\prod_{j=1}^n \theta_j^\alpha$, jako monotoniczny, jest zbieżny p.n. Z mocnego prawa wielkich liczb wynika, że ciąg ten jest zbieżny do zera. Łatwo zauważyć, że

$$X_n^\alpha - X_0^\alpha \prod_{j=1}^n \theta_j^\alpha \stackrel{d}{=} \xi_n, \quad n \geqslant 1,$$

gdzie

$$\xi_n = \varepsilon_1 \theta_1^\alpha + \varepsilon_2 \theta_2^\alpha \theta_1^\alpha + \ldots + \varepsilon_n \prod_{j=1}^n \theta_j^\alpha,$$

i ciąg ξ_n jest zbieżny p.n. do X_∞^α, gdzie X_∞ jest określony równaniem (6.19). Zatem jeśli łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ma rozkład stacjonarny, to musi to być rozkład X_∞.

Niech zmienna losowa Z_∞ będzie określona jak w (6.10). Zauważmy teraz, że

$$\theta_0^\alpha Z_\infty \stackrel{d}{=} X_\infty^\alpha.$$

Co więcej, zmienna losowa $X_\infty^\alpha + \varepsilon_0$ ma taki sam rozkład, co zmienna losowa Z_∞. W związku z tym, rozkład zmiennej X_∞ jest jedynym rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Następnie zauważmy, że rozkład zmiennej Z_∞, będący splotem dwóch rozkładów, z czego jeden jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a, jest absolutnie ciągły. Zatem ma on gęstość f_{Z_∞}. Ponieważ $X_\infty \stackrel{d}{=} \theta_0 Z_\infty^{1/\alpha}$, a gęstość zmiennej $Z_\infty^{1/\alpha}$ wyraża się wzorem $\alpha x^{\alpha-1} f_{Z_\infty}(x^\alpha)$, więc zmienna losowa X_∞ również ma gęstość f_{X_∞}. Wynika stąd, że $f_*(x)x = f_{X_\infty}(x)$ dla $x > 0$. Aby wykazać, że f_* jest dodatnia p.n. wystarczy (na mocy lematu 6.4) pokazać, że f_{Z_∞} jest dodatnia p.w. Uwzględniając fakt, że $Z_\infty \stackrel{d}{=} X_\infty^\alpha + \varepsilon_0$, otrzymujemy

$$f_{Z_\infty}(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} f_{X_\infty^\alpha}(y) dy,$$

co dowodzi, że f_{Z_∞} jest dodatnia na przedziale (x_0, ∞), gdzie $x_0 \geqslant 0$. Aby zakończyć dowód pozostało nam pokazać, że $x_0 = 0$. Z tożsamości (6.10) wynika, że $f_{Z_\infty}(x)$ spełnia następujące równanie

$$f_{Z_\infty}(x) = \int_0^x \int_z^\infty g_\alpha\Big(\frac{z}{y}\Big) \frac{1}{y} f_{Z_\infty}(y) dy e^{-(x-z)} dz,$$

gdzie g_α jest gęstością zmiennej losowej θ_0^α. Zmieniając kolejność całkowania uzyskujemy

$$f_{Z_\infty}(x) = \int_0^\infty \int_0^{\min\{x,y\}} g_\alpha\Big(\frac{z}{y}\Big)\frac{1}{y}e^{-(x-z)}dz f_{Z_\infty}(y)dy.$$

Przypuśćmy, że $x_0 > 0$. Wówczas dla każdego $x < x_0$ i każdego $y > x_0$ otrzymujemy

$$\int_0^x g_\alpha\Big(\frac{z}{y}\Big)\frac{1}{y}e^{-(x-z)}dz = 0.$$

Wynika stąd, że dla każdego $r < 1$ mamy $\int_0^r g_\alpha(t)dt = 0$, co jest sprzeczne z tym, że $\int_0^1 g_\alpha(t)dt = 1$ i dowodzi, że $x_0 = 0$. Stąd gęstość f_* jest dodatnia p.w.

W końcu, zauważmy, że $0 \leqslant \mathbb{E}\theta_0^\alpha < 1$. W zasadzie jako, że $\theta_0^\alpha \in [0,1]$, więc $\mathbb{E}\theta_0^\alpha \in [0,1]$. Przypuśćmy, że $\mathbb{E}\theta_0^\alpha = 1$. Wówczas $\theta_0^\alpha = 1$ p.w., co implikuje, że $\theta_0 = 1$ p.w. Zatem θ_0 nie ma gęstości, co prowadzi do sprzeczności. Z (6.19) możemy obliczyć

$$\mathbb{E}X_\infty^\alpha = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}\varepsilon_k \prod_{j=1}^k \mathbb{E}\theta_j^\alpha = \sum_{k\geqslant 1}\prod_{j=1}^k \mathbb{E}\theta_0^\alpha = \sum_{k\geqslant 1}(\mathbb{E}\theta_0^\alpha)^k = \frac{\mathbb{E}\theta_0^\alpha}{1-\mathbb{E}\theta_0^\alpha},$$

co daje (6.21) i kończy dowód. □

Z lematów 6.3 oraz 6.5 wynika, że wszystkie założenia twierdzenia 4.6 są spełnione. Twierdzenie 6.2 jest rezultatem połączenia twierdzenia 4.6 z następującym lematem.

Lemat 6.6. *Zmienna losowa t_1 określona w równaniu* (6.16) *spełnia warunek* (4.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}\log\theta_1 > -\infty$, a w tym przypadku*

$$\mathbb{E}(t_1) = \mathbb{E}(-\log\theta_1) = -\int_0^1 \log z\, h(z) z dz.$$

Dowód. Mamy $t_1 = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\varepsilon_1 + X_0^\alpha}{X_0^\alpha}$, gdzie ε_1 oraz X_0 są niezależne. To prowadzi do

$$\frac{1}{\alpha}\log\varepsilon_1 - \log X_0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}(\varepsilon_1 + X_0^\alpha - 1) - \log X_0.$$

Aby obliczyć pierwszy moment t_1 weźmy $X_0 \stackrel{d}{=} X_\infty$. Zmienna $X_0^\alpha \stackrel{d}{=} X_\infty^\alpha$ jest całkowalna na mocy równania (6.21) oraz $\mathbb{E}\log\varepsilon_1 = -\gamma$, gdzie γ jest liczbą Eulera-Mascheroniego, więc t_1 ma skończony pierwszy moment wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbb{E}\log X_\infty| < \infty$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t_1) &= \int_0^\infty\int_0^\infty \log\left(\frac{y}{x^\alpha}+1\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y}dy f_*(x)m(dx)\\ &= \int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty \Big(\log\theta(y+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - \log x - \log\theta\Big)e^{-y}dy f_*(x)m(dx)d\theta\\ &= \mathbb{E}\log X_\infty - \mathbb{E}\log X_\infty - \mathbb{E}\log\theta_1 = -\mathbb{E}\log\theta_1.\end{aligned}$$

Ponadto z warunku (6.20) wynika, że

$$\log X_\infty^\alpha \stackrel{d}{=} \alpha \log \theta_0 + \log \varepsilon_0 + \log\left(1 + \frac{X_\infty^\alpha}{\varepsilon_0}\right) \geqslant \alpha \log \theta_0 + \log \varepsilon_0.$$

Z drugiej strony mamy

$$\log X_\infty^\alpha \stackrel{d}{=} \alpha \log \theta_0 + \log(\varepsilon_0 + X_\infty^\alpha) \leqslant \alpha \log \theta_0 + \varepsilon_0 + X_\infty^\alpha - 1.$$

Zatem

$$\mathbb{E} \log \theta_0 + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\log \varepsilon_0 \leqslant \mathbb{E}\log X_\infty \leqslant \mathbb{E}\log \theta_0 + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}X_\infty^\alpha,$$

co implikuje, że $\mathbb{E}\log\theta_1 > -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbb{E}\log X_\infty| < \infty$ i kończy dowód. □

6.4 Przykłady i uzupełnienia związane z procesem fragmentacji

Udowodniliśmy, że jednorodne równanie fragmentacji ma rozwiązanie samopodobne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}(\log\theta_1) > -\infty$, gdzie θ_1 jest zmienną losową z dystrybuantą H określoną jak w równaniu (6.4). W tym przypadku równanie (6.12) ma całkowalne rozwiązanie stacjonarne. W tym rozdziale podamy wzór rozwiązania stacjonarnego wyrażonego za pomocą gęstości zmiennej losowej Z_∞ zdefiniowanej równaniem (6.10).

Używając oznaczeń z rozdziału 4.1 zauważmy, że f_* w lemacie 6.5 jest jedyną gęstością niezmienniczą operatora stochastycznego K odpowiadającemu jądru stochastycznemu $\mathcal{K}$ procesu Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ określonego warunkiem (6.17), więc

$$f_* = P(\varphi \overline{f}_*), \quad \text{gdzie } \overline{f}_* = R_0 f_*,$$

a R_0 jest jak w lemacie 4.3. Jeśli w równaniu (4.6) weźmiemy $f = f_*$, to otrzymujemy, że

$$\int_0^\infty \varphi(x)\overline{f}_*(x)m(dx) = \int_0^\infty f_*(x)m(dx) = 1. \tag{6.22}$$

Z lematu 4.3 wynika, że $\mathbb{E}(t_1) = \|\overline{f}_*\|$. Zatem, z lematu 6.6 wynika, że $\|\overline{f}_*\| = \mathbb{E}(-\log\theta_1)$.

Z drugiej strony, $f_*(x)x$ jest gęstością zmiennej losowej $X_\infty \stackrel{d}{=} \theta_0 Z_\infty^{1/\alpha}$, gdzie $\theta_0 \stackrel{d}{=} \theta_1$ oraz operator P odpowiada operacji mnożenia przez θ_1. Wówczas gęstość zmiennej $Z_\infty^{1/\alpha}$ spełnia warunek

$$\alpha x^{\alpha-1} f_{Z_\infty}(x^\alpha) = \varphi(x)\overline{f}_*(x)x.$$

W konsekwencji, jeżeli $\mathbb{E}(-\log\theta_1) < \infty$, to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma jedyną gęstość niezmienniczą u_* i jest ona zadana wzorem

$$u_*(x) = \frac{\overline{f}_*(x)}{\|\overline{f}_*\|} = \frac{f_{Z_\infty}(x^\alpha)}{\mathbb{E}(-\log\theta_1)x^2}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, co następuje:

Lemat 6.7. *Jeśli spełniony jest warunek* (6.14) *lub równoważnie zachodzi warunek* $\mathbb{E}(-\log\theta_1) < \infty$*, to rozwiązanie samopodobne równania* (6.1) *z twierdzenia 6.2 jest postaci*

$$c_*(t,x) = \frac{f_{Z_\infty}((1+t)x^\alpha)}{\mathbb{E}(-\log\theta_1)x^2}, \quad x,t>0,$$

gdzie funkcja f_{Z_∞} *jest gęstością zmiennej losowej* Z_∞ *określonej wzorem* (6.10).

Ta forma samopodobieństwa rozwiązania powinna być zestawiona z założeniem skalowalności z [70, równania (15)], gdzie funkcja Φ odpowiada funkcji f_{Z_∞}.

Teraz podamy dający się dokładnie rozwiązać przykład, znany już od publikacji [52].

Przykład 6.1. Rozważmy funkcję $h(z) = \beta z^{\beta-2}$, gdzie $\beta > 0$. Wówczas $\theta_1 \stackrel{d}{=} U^{1/\beta}$, gdzie U jest zmienną losową z rozkładem jednostajnym na $[0,1]$. Zmienna Z_∞ ma rozkład gamma z parametrem kształtu $1+\beta/\alpha$ (patrz np. [63, przykład 3.8]), więc mamy

$$f_{Z_\infty}(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta/\alpha)}x^{\beta/\alpha}e^{-x}, \quad x>0,$$

gdzie Γ jest funkcją gamma. Stąd wynika, że

$$u_*(x) = \frac{\beta}{\Gamma(1+\beta/\alpha)}x^{\beta-2}e^{-x^\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta/\alpha)}x^{\beta-2}e^{-x^\alpha}.$$

Zauważmy, że $u_*(x)x$ jest gęstością uogólnionego rozkładu gamma z parametrami $(\alpha,\beta,1)$.

Zmienna losowa Z_∞ może zostać wyrażona jako funkcjonał wykładniczy

$$Z_\infty \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-\alpha Z(t)}dt$$

złożonego procesu Poissona $\{Z(t)\}_{t\geqslant 0}$ jak w (6.11). Wykładnik Laplace'a $\phi(q)$ procesu $\{Z(t)\}_{t\geqslant 0}$, zdefiniowany jako

$$\mathbb{E}(e^{-qZ(t)}) = e^{-t\phi(q)}, \quad t>0,$$

jest postaci

$$\phi(q) = \mathbb{E}(1-\theta_1^q) = \int_0^1 (1-z^q)zh(z)dz, \quad q>0.$$

Zatem z [18, wniosku 3.3] wynika, że zmienna losowa Z_∞ jest wyznaczona przez swoje momenty

$$\mathbb{E}(Z_\infty^n) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n \phi(\alpha k)} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n \mathbb{E}(1-\theta_1^{\alpha k})}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Teraz przedstawimy dwa przykłady, gdzie zmienna losowa Z_∞ jest określona przez swoje momenty.

Przykład 6.2. Przypomnijmy, że zmienna losowa θ ma rozkład beta z parametrami (a, b), $a, b > 0$, gdy ma gęstość postaci

$$f_\theta(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Wówczas

$$\mathbb{E}(\theta^r) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^r x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(r+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(r+a+b)}$$

dla wszystkich $r > 0$. W przykładzie 6.1 zmienna losowa $\theta \overset{d}{=} \theta_1$ ma rozkład beta z parametrami $(\beta, 1)$, więc mamy

$$\mathbb{E}(\theta^{\alpha q}) = \frac{\Gamma(\alpha q + \beta)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha q + \beta + 1)} = \frac{\beta}{\alpha q + \beta},$$

a odpowiadająca jej zmienna losowa Z_∞ ma momenty

$$\mathbb{E}(Z_\infty^n) = \prod_{k=1}^n (k + \beta/\alpha) = \frac{\Gamma(n + 1 + \beta/\alpha)}{\Gamma(1 + \beta/\alpha)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Przypuśćmy teraz, że θ jest iloczynem dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie beta z parametrami odpowiednio $(\beta_1, 1)$ i $(\beta_2, 1)$. Wówczas

$$\mathbb{E}(\theta^{\alpha q}) = \frac{\beta_1}{\alpha q + \beta_1} \frac{\beta_2}{\alpha q + \beta_2}, \quad q > 0,$$

co oznacza, że

$$\mathbb{E}(Z_\infty^n) = \prod_{k=1}^n \frac{(k + a_1)(k + a_2)}{k + a_1 + a_2},$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\beta_1}{\alpha}, \quad a_2 = \frac{\beta_2}{\alpha}. \tag{6.23}$$

Zatem

$$\mathbb{E}(Z_\infty^n) = \frac{\Gamma(n+1+a_1)\Gamma(1+a_1+a_2)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(n+1+a_1+a_2)} \frac{\Gamma(n+1+a_2)}{\Gamma(1+a_2)}$$

co dowodzi tego, że Z_∞ jest iloczynem dwóch zmiennych losowych, z których jedna ma rozkład beta z parametrami $(1 + a_1, a_2)$, a druga ma rozkład gamma z parametrem kształtu $1 + a_2$.

Uwaga 6.8. Łatwo zauważyć, że jeśli $Z_\infty = \theta\xi$, gdzie θ oraz ξ są niezależnymi zmiennymi losowymi, θ ma rozkład beta z parametrami $(1+a_1, a)$, a ξ ma rozkład gamma z parametrem kształtu $1+a_2$, to gęstość zmiennej losowej Z_∞ jest postaci

$$f_{Z_\infty}(x) = \frac{\Gamma(1+a_1+a)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)} e^{-x} x^{a_2} U(a, 1+a_2-a_1, x), \quad x > 0,$$

gdzie U jest funkcją hipergeometryczną konfluentną drugiego rodzaju

$$U(a,b,x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xs} s^{a-1} (1+s)^{b-a-1} ds, \quad a, x > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Przykład 6.3. Rozważmy teraz, podobnie jak w [70], funkcję

$$h(z) = p\beta_1 z^{\beta_1 - 2} + (1-p)\beta_2 z^{\beta_2 - 2}, \quad z \in (0,1),$$

gdzie $\beta_1, \beta_2 > 0$, $p \in [0,1]$. Uzyskujemy

$$\mathbb{E}(\theta^{\alpha q}) = p \frac{\beta_1}{\alpha q + \beta_1} + (1-p) \frac{\beta_2}{\alpha q + \beta_2},$$

a stąd mamy, że

$$1 - \mathbb{E}(\theta^{\alpha k}) = p \frac{\alpha k}{\alpha k + \beta_1} + (1-p) \frac{\alpha k}{\alpha k + \beta_2},$$

Prowadzi to do

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_\infty^n) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+a_1)(k+a_2)}{k + pa_2 + (1-p)a_1} \\
&= \frac{\Gamma(n+1+a_1)}{\Gamma(1+a_1)} \frac{\Gamma(n+1+a_2)}{\Gamma(1+a_2)} \frac{\Gamma(1+pa_2+(1-p)a_1)}{\Gamma(n+1+pa_2+(1-p)a_1)},
\end{aligned}$$

gdzie a_1, a_2 są takie, jak w (6.23). Możemy założyć, że $\beta_2 > \beta_1$ oraz $p > 0$. Wówczas $p(a_2 - a_1) > 0$ i otrzymujemy

$$\mathbb{E}(Z_\infty^n) = \frac{\Gamma(n+1+a_1)\Gamma(1+a_1+p(a_2-a_1))}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(n+1+a_1+p(a_2-a_1))} \frac{\Gamma(n+1+a_2)}{\Gamma(1+a_2)},$$

co pokazuje, że Z_∞ jest iloczynem dwóch niezależnych zmiennych losowych, z których jedna ma rozkład beta z parametrami $(1+a_1, p(a_2-a_1))$, a druga ma rozkład gamma z parametrem kształtu $1+a_2$.

Rozdział ten zakończymy komentarzem odnośnie zachowania rozwiązań równania fragmentacji, gdy $\mathbb{E}(\log\theta_1) = -\infty$.

Lemat 6.9. *Jeżeli warunek* (6.14) *nie jest spełniony, to wówczas dla każdego rozwiązania c równania* (6.1) *z warunkiem początkowym* $c_0 \in D(m)$ *mamy*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{x_0/\gamma(t)}^\infty c(t,x) x\, dx = 0 \quad \text{dla wszystkich } x_0 > 0.$$

Dowód. Jeśli $\mathbb{E}(-\log\theta_1) = \infty$, to $\overline{f}_*$ nie jest całkowalna, a półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nie ma gęstości niezmienniczej, ponieważ gdyby istniała, to byłaby ona wielokrotnością $\overline{f}_*$, co wynika z wniosków 3.13 i 3.14. Zatem z lematu 2.8 wiemy, że dla żadnego $s > 0$ operator $P(s)$ nie ma gęstości niezmienniczej. Na mocy lematu 6.3 oraz wniosku 2.4 uzyskujemy, że operator $P(s)$ jest wymiatający, co w połączeniu z twierdzeniem 2.11 skutkuje tym, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest wymiatająca z każdego zbioru B spełniającego warunek

$$\int_B \overline{f}_*(x)m(dx) < \infty.$$

Mamy $\varphi(x) = \alpha x^\alpha \geqslant \varphi(x_0) > 0$ dla każdego $x \geqslant x_0 > 0$. Stąd i z równania (6.22) widzimy, że $\overline{f}_*$ jest całkowalna na przedziałach $B = (x_0, \infty)$, $x_0 > 0$. W efekcie,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{x_0}^{\infty} P(t)c_0(x)xdx = 0,$$

co w połączeniu z warunkiem (6.18) kończy dowód. □

Uwaga 6.10. Warto zauważyć, że każde rozwiązanie c równania (6.1) z warunkiem początkowym $c_0 \in D(m)$ spełnia warunek

$$\lim_{t\to\infty} \int_{x_0}^{\infty} c(t,x)xdx = 0 \quad \text{dla każdego } x_0 > 0.$$

Aby to pokazać, trzeba zwrócić uwagę na to, że jeśli warunek (6.14) nie jest spełniony, to jest to konsekwencją wniosku 6.9, ponieważ $\gamma(t) \geqslant 1$ oraz $c \geqslant 0$. Natomiast w przypadku gdy warunek (6.14) jest spełniony, to

$$\int_{x_0}^{\infty} c(t,x)xdx \leqslant \int_0^{\infty} |c(t,x) - c_*(t,x)|xdx + \int_{x_0}^{\infty} c_*(t,x)xdx$$

i na mocy twierdzenia 6.2 oraz całkowalności u_* prawa strona zbiega do zera, gdy $t \to \infty$.

Rozdział 7

Podsumowanie

Rozprawę tę poświęciliśmy zagadnieniu istnienia gęstości niezmienniczych dla kawałkami deterministycznych procesów Markowa. Dokonaliśmy analizy tego problemu w oparciu o teorię półgrup stochastycznych, która, z naszego punktu widzenia, była niezwykle użyteczna. Wychodząc od twierdzenia perturbacyjnego Kato-Voigta uzyskaliśmy półgrupę minimalną, dla której gęstości niezmiennicze związaliśmy z gęstościami niezmienniczymi operatora stochastycznego K. Przypomnieliśmy zależności między półgrupami stochastycznymi a KDPM, co pozwoliło nam uzyskać warunki wystarczające na istnienie jedynej gęstości niezmienniczej dla semiukładów dynamicznych ze skokami (twierdzenie 4.2). Aby uzyskać gęstość niezmienniczą stosowaliśmy alternatywę Foguela w wersji z twierdzenia 2.2 i warunek typu Fostera-Lapunowa (lemat 2.3). Ważne dla zastosowań warunki dostateczne podaliśmy w rozdziale 4.2 (wniosek 4.10, uwagi 4.8 i 4.9). Bezpośrednio z tych wyników korzystaliśmy analizując model ekspresji genu z burstingiem. Istotne było także pytanie o asymptotyczną stabilność półgrupy minimalnej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Rezultaty dotyczące tego problemu przedstawiliśmy w twierdzeniu 4.6 i zilustrowaliśmy przykładem opisującym proces fragmentacji.

W rozprawie poszukiwaliśmy absolutnie ciągłych miar niezmienniczych. Bazowaliśmy na wynikach z pracy [62], więc konieczne dla nas było założenie, że semiukład $\{\pi_t\}_{t\geqslant 0}$ spełnia warunek $\pi_t(E) \subseteq E$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, a także, że jądro stochastyczne $\mathcal{P}$ wyznacza operator przejścia P na L^1. Nie wymagaliśmy natomiast, żeby proces był niewybuchający, jak w [20] i [23].

Uzyskane przez nas wyniki można stosować do bardziej zaawansowanych modeli, niż przedstawione w rozdziałach 5 i 6. Warto tu przywołać np. publikację [58]. Ciekawym rozwinięciem analizowanego przez nas zagadnienia będzie otrzymanie twierdzeń o istnieniu miar niezmienniczych dla KDPM, w których oprócz losowych skoków występują także skoki wymuszone, np. osiągnięciem danego poziomu (jak w przypadku produkcji subtyliny [37]), czy dojściem do brzegu obszaru (jak w przypadku bilardów [28]).

Literatura

[1] O. Arino and R. Rudnicki. Stability of phytoplankton dynamics. *C. R. Biologies*, 327:961–969, 2004.

[2] L. Arlotti. A perturbation theorem for positive contraction semigroups on L^1-spaces with applications to transport equations and Kolmogorov's differential equations. *Acta Appl. Math.*, 23(2):129–144, 1991.

[3] L. Arlotti and J. Banasiak. Strictly substochastic semigroups with application to conservative and shattering solutions to fragmentation equations with mass loss. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2):693–720, 2004.

[4] Y. Bakhtin and T. Hurth. Invariant densities for dynamical systems with random switching. *Nonlinearity*, 25(10):2937–2952, 2012.

[5] J. Banasiak. On an extension of the Kato-Voigt perturbation theorem for substochastic semigroups and its application. *Taiwanese J. Math.*, 5(1):169–191, 2001.

[6] J. Banasiak. Conservative and shattering solutions for some classes of fragmentation models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(4):483–501, 2004.

[7] J. Banasiak and L. Arlotti. *Perturbations of positive semigroups with applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London, 2006.

[8] J. Banasiak and W. Lamb. On the application of substochastic semigroup theory to fragmentation models with mass loss. *J. Math. Anal. Appl.*, 284(1):9–30, 2003.

[9] J. Banasiak and M. Mokhtar-Kharroubi. Universality of dishonesty of substochastic semigroups: shattering fragmentation and explosive birth-and-death processes. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 5(3):529–542, 2005.

[10] M. Benaïm, S. Le Borgne, F. Malrieu, and P.-A. Zitt. Qualitative properties of certain piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 51(3):1040–1075, 2015.

[11] J. Bertoin. *Random fragmentation and coagulation processes*, volume 102 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[12] J. Bertoin and M.-E. Caballero. Entrance from 0+ for increasing semi-stable Markov processes. *Bernoulli*, 8(2):195–205, 2002.

[13] J. Bertoin and A. R. Watson. Probabilistic aspects of critical growth-fragmentation equations. *Adv. in Appl. Probab.*, 48(A):37–61, 2016.

[14] W. Biedrzycka and M. Tyran-Kamińska. Existence of invariant densities for semiflows with jumps. *J. Math. Anal. Appl.*, 435(1):61–84, 2016.

[15] W. Biedrzycka and M. Tyran-Kamińska. Self-similar solutions of fragmentation equations revisited. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 23(1):13–27, 2018.

[16] A. Bobrowski, T. Lipniacki, K. Pichór, and R. Rudnicki. Asymptotic behavior of distributions of mRNA and protein levels in a model of stochastic gene expression. *J. Math. Anal. Appl.*, 333(2):753–769, 2007.

[17] M. E. Caballero and V. c. Rivero. On the asymptotic behaviour of increasing self-similar Markov processes. *Electron. J. Probab.*, 14:865–894, 2009.

[18] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 73–130. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.

[19] R. Chill and Y. Tomilov. Stability of operator semigroups: ideas and results. In *Perspectives in operator theory*, volume 75 of *Banach Center Publ.*, pages 71–109. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007.

[20] O. L. V. Costa. Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes. *J. Appl. Probab.*, 27(1):60–73, 1990.

[21] O. L. V. Costa and F. Dufour. Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 47(2):1053–1077, 2008.

[22] M. H. A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388, 1984.

[23] M. H. A. Davis. *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability.* Chapman & Hall, London, 1993.

[24] W. Desch. Perturbations of positive semigroups in al-spaces. Unpublished, 1988.

[25] M. Doumic and M. Escobedo. Time asymptotics for a critical case in fragmentation and growth-fragmentation equations. *Kinet. Relat. Models*, 9(2):251–297, 2016.

[26] F. Dufour and O. L. V. Costa. Stability of piecewise-deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 37(5):1483–1502, 1999.

[27] M. Escobedo, S. Mischler, and M. Rodriguez Ricard. On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 22(1):99–125, 2005.

[28] S. N. Evans. Stochastic billiards on general tables. *Ann. Appl. Probab.*, 11(2):419–437, 2001.

[29] A. Filippov. On the distribution of the sizes of particles which undergo splitting. *Theory Probab. Appl.*, 6:275–294, 1961.

[30] S. R. Foguel. *The ergodic theory of Markov processes.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 21. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.

[31] N. Friedman, L. Cai, and X. Xie. Linking stochastic dynamics to population distribution: An analytical framework of gene expression. *Phys. Rev. Lett.*, 97:168302–1/4, 2006.

[32] C. M. Goldie and R. A. Maller. Stability of perpetuities. *Ann. Probab.*, 28(3):1195–1218, 2000.

[33] B. Haas. Loss of mass in deterministic and random fragmentations. *Stochastic Process. Appl.*, 106(2):245–277, 2003.

[34] B. Haas. Asymptotic behavior of solutions of the fragmentation equation with shattering: an approach via self-similar Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(2):382–429, 2010.

[35] T. Kato. On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations. *J. Math. Soc. Japan*, 6:1–15, 1954.

[36] I. Kornfeld and M. Lin. Weak almost periodicity of L_1 contractions and coboundaries of non-singular transformations. *Studia Math.*, 138(3):225–240, 2000.

[37] P. Kouretas, K. Koutroumpas, J. Lygeros, and Z. Lygerou. Stochastic hybrid modeling of biochemical processes. In *Stochastic Hybrid Systems*, volume 24. Boca Raton, FL: CRC, 2006.

[38] U. Krengel and M. Lin. On the range of the generator of a Markovian semigroup. *Math. Z.*, 185(4):553–565, 1984.

[39] A. Lasota and M. C. Mackey. *Chaos, fractals, and noise*, volume 97 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[40] T. Lipniacki, P. Paszek, A. Marciniak-Czochra, A. R. Brasier, and M. Kimmel. Transcriptional stochasticity in gene expression. *J. Theoret. Biol.*, 238(2):348–367, 2006.

[41] M. C. Mackey and M. Tyran-Kamińska. Dynamics and density evolution in piecewise deterministic growth processes. *Ann. Polon. Math.*, 94(2):111–129, 2008.

[42] M. C. Mackey, M. Tyran-Kamińska, and R. Yvinec. Molecular distributions in gene regulatory dynamics. *J. Theoret. Biol.*, 274:84–96, 2011.

[43] M. C. Mackey, M. Tyran-Kamińska, and R. Yvinec. Dynamic behavior of stochastic gene expression models in the presence of bursting. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(5):1830–1852, 2013.

[44] E. D. McGrady and R. M. Ziff. "Shattering" transition in fragmentation. *Phys. Rev. Lett.*, 58(9):892–895, 1987.

[45] D. J. McLaughlin, W. Lamb, and A. C. McBride. A semigroup approach to fragmentation models. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(5):1158–1172, 1997.

[46] Z. Melzak. A scalar transport equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85(2):547–560, 1957.

[47] S. Meyn and P. Caines. Asymptotic behavior of stochastic systems possessing markovian realizations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3):535–561, 1991.

[48] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.

[49] P. Michel, S. Mischler, and B. Perthame. General relative entropy inequality: an illustration on growth models. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(9):1235–1260, 2005.

[50] S. Mischler and J. Scher. Spectral analysis of semigroups and growth-fragmentation equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(3):849–898, 2016.

[51] M. Mokhtar-Kharroubi. On strong convergence to ergodic projection for perturbed substochastic semigroups. In *Semigroups of Operators - Theory and Applications*, volume 113 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 89–103. Springer, New York, 2015.

[52] T. W. Peterson. Similarity solutions for the population balance equation describing particle fragmentation. *Aerosol Sci. Technol.*, 5(1):93–101, 1986.

[53] K. Pichór and R. Rudnicki. Stability of Markov semigroups and applications to parabolic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 215(1):56–74, 1997.

[54] K. Pichór and R. Rudnicki. Continuous Markov semigroups and stability of transport equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 249:668–685, 2000.

[55] K. Pichór and R. Rudnicki. Asymptotic decomposition of substochastic operators and semigroups. *J. Math. Anal. Appl.*, 436(1):305–321, 2016.

[56] R. Rudnicki. On asymptotic stability and sweeping for Markov operators. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 43(3):245–262, 1995.

[57] R. Rudnicki, K. Pichór, and M. Tyran-Kamińska. Markov semigroups and their applications. In *Dynamics of Dissipation*, volume 597 of *Lectures Notes in Physics*, pages 215–238. Springer, Berlin, 2002.

[58] R. Rudnicki and M. Tyran-Kamińska. *Piecewise deterministic processes in biological models*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Cham, 2017. Springer Briefs in Mathematical Methods.

[59] A. Tomski. The dynamics of enzyme inhibition controlled by piece-wise deterministic Markov process. In *Semigroups of Operators - Theory and Applications*, volume 113 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 299–316. Springer, New York, 2015.

[60] M. Tyran-Kamińska. Support overlapping Markov semigroups. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 51(4):419–438, 2003.

[61] M. Tyran-Kamińska. Ergodic theorems and perturbations of contraction semigroups. *Studia Math.*, 195(2):147–155, 2009.

[62] M. Tyran-Kamińska. Substochastic semigroups and densities of piecewise deterministic Markov processes. *J. Math. Anal. Appl.*, 357:385–402, 2009.

[63] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Adv. in Appl. Probab.*, 11(4):750–783, 1979.

[64] J. Voigt. On substochastic C_0-semigroups and their generators. *Transport Theory Statist. Phys.*, 16(4-6):453–466, 1987.

[65] W. Wagner. Random and deterministic fragmentation models. *Monte Carlo Methods Appl.*, 16(3-4):399–420, 2010.

[66] R. Wieczorek. A stochastic particles model of fragmentation process with shattering. *Electron. J. Probab.*, 20:no. 86, 17, 2015.

[67] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 6th edition, 1980.

[68] R. Yvinec, C. Zhuge, J. Lei, and M. C. Mackey. Adiabatic reduction of a model of stochastic gene expression with jump Markov process. *J. Math. Biol.*, 68(5):1051–1070, 2014.

[69] S. Zeiser, U. Franz, and V. Liebscher. Autocatalytic genetic networks modeled by piecewise-deterministic Markov processes. *J. Math. Biol.*, 60(2):207–246, 2010.

[70] R. M. Ziff. New solutions to the fragmentation equation. *J. Phys. A*, 24(12):2821–2828, 1991.

[71] R. M. Ziff and E. McGrady. Kinetics of polymer degradation. *Macromolecules*, 19(10):2513–2519, 1986.